শ্রীকামিনী কুমার দে

বলবিদ্যা প্রবেশ

ক্যালকাটা বুক হাউস

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ্ কর্তৃক নবম ও দশম শ্রেণীর জন্য অনুমোদিত
নূতন সিলেবাস অনুযায়ী ঐচ্ছিক বিষয়রূপে লিখিত।
[Vide Board's Curriculum & Syllabus Vol II dated, May 1974]

বলবিদ্যা প্রবেশ

[MECHANICS]

FOR MADHYAMIK STUDENTS

***শ্রীকামিনীকুমার দে,* এম্. এস্-সি. (স্বর্ণপদকপ্রাপ্ত)**
কলিকাতা প্রেসিডেন্সি কলেজের ভূতপূর্ব অধ্যাপক ও
বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়ের পরীক্ষক

ক্যালকাটা বুক হাউস
৯/১, বঙ্কিম চ্যাটার্জি স্ট্রীট, কলিকাতা-৭০০০৭৩

প্রকাশক :
শ্রীপরেশচন্দ্র ভাওয়াল
ক্যালকাটা বুক হাউস
১।১, বঙ্কিম চ্যাটার্জি স্ট্রীট
কলিকাতা-৭৩

মুদ্রণ : মে, ১৯৮৫

মূল্য : আঠার টাকা মাত্র

Paper used for printing of this book was made available by the Govt. of India at a concessional rate.

মুদ্রাকর :—
সি. বি. অফসেট
২৪এ, বাগমারী রোড
কলিকাতা-৭০০০৫৪

ভূমিকা

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষদ্ কর্তৃক মাধ্যমিক বিদ্যালয়সমূহে বলবিদ্যা (Mechanics) (ঐচ্ছিক) পাঠ্যবিষয়ের অন্তর্ভুক্ত হওয়ার পর মাতৃভাষায় নূতন পাঠ্যসূচী অনুযায়ী এই জনপ্রিয় বিষয়ে একখানি পুস্তকের বিশেষ অভাব অনুভূত হইয়াছে। অনেক শিক্ষকবন্ধু হইতে এইরূপ একখানি পুস্তক প্রণয়নের জন্য অনুরোধ পাইয়াছি। তদনুযায়ী এই নূতন প্রচেষ্টা। বস্তুতঃ ইহা মৎপ্রণীত তিনখণ্ডে লিখিত 'প্রাথমিক বলবিদ্যা' গ্রন্থ হইতে সংকলিত। ছাত্রদের গণিতে সীমিত জ্ঞানের বিষয় মনে রাখিতে হইয়াছে। ত্রিকোণমিতির ব্যবহার ব্যতীত বলবিদ্যা অধ্যয়নে অধিক অগ্রসর হওয়া সম্ভব নহে। ছাত্রেরা অল্পায়াসেই প্রয়োজনীয় ত্রিকোণমিতিক সূত্রের ব্যবহারে অভ্যস্ত হইয়া উঠিবে আশা করি। বলা বাহুল্য, প্রচলিত আদর্শ পুস্তকসমূহ হইতে সর্বপ্রকার সাহায্য গ্রহণ করিয়াছি। পূর্বসূরীদের নিকট আমি অশেষ কৃতজ্ঞ। ক্যালকাটা বুক হাউসের কর্মিদের নিষ্ঠা ও কর্মতৎপরতা ব্যতীত এত অল্প সময়ের মধ্যে এই প্রকার পুস্তক প্রকাশ করা সম্ভব হইত না। সংশ্লিষ্ট সকলকে এবং সর্বোপরি প্রকাশক শ্রীপরেশচন্দ্র ভাওয়ালকে এজন্য ধন্যবাদ জানাই। পুস্তক প্রণয়নে শ্রীজ্যোতির্ময় গুহের নিকট আমি অশেষ রকমে ঋণী। সহৃদয় শিক্ষক বন্ধুগণ এই পুস্তক সাদরে গ্রহণ করিলে এবং ইহা প্রথম শিক্ষার্থীদের উপকারে আসিলেই আমার শ্রম সার্থক মনে করিব। ভুলত্রুটির প্রতি দৃষ্টি আকর্ষণ করিলে এবং পুস্তকের উৎকর্ষ সাধনে পরামর্শ ও উপদেশ পাইলে কৃতজ্ঞ থাকিব।

কলিকাতা
১৯. ৬. ৭৫

শ্রীকামিনীকুমার দে

SYLLABUS FOR MECHANICS

C. G. S. and F. P. S. Units ; Conversion from one set of Units to the other.

Varieties of motion : Elementary notions of speed, velocity and acceleration ; composition and resolution of velocities ; Rectilinear motion of a body with constant acceleration ; vertical motion under gravity, Rectilinear motion under gravity up and down a smooth inclined plane.

Elementary notion of mass, inertia and momentum ; Newton's Laws of Motion.

Units of force : Poundal, dyne, relation between mass and weight ; gravitational unit of force.

Composition and resolution of forces, parallelogram of forces.

Moments, conditions for equilibrium of three forces not parallel.

Triangle of forces.

Composition of parallel forces.

Conditions for the equilibrium of three parallel forces.

Centre of parallel forces.

Centre of gravity.

Experimental determination of the Centre of gravity.

Position of the Centre of gravity in the following cases :—

(1) Uniform rod,

(2) Uniform triangular lamina,

(3) Uniform lamina of the shape of a parallelogram,

(4) Uniform Circular disc.

প্রয়োজনীয় সূত্র ও ফল

(Important Formulæ and Results)

[গতিবিদ্যা]

1. দুই বেগের লব্ধি (Resultant of two velocities)

পরস্পর α কোণে নত u এবং v বেগের লব্ধি w হইলে

$$w = u^2 + v^2 + 2uv \cos \alpha \quad ....(1)$$

লব্ধি বেগের দিক্ u বেগের সহিত θ কোণ করিলে

$$\tan \theta = \frac{v \sin \alpha}{u + v + \cos \alpha} \quad ....(2)$$

বেগ দুইটি লম্বাভিমুখী হইলে অর্থাৎ যখন $\alpha = 90^\circ$

$$w^2 = u^2 + v^2 \quad \text{এবং} \tan \theta = \frac{v}{u}$$ [অনু : 3-5 এবং 3-6]

2. সমত্বরণে এক সরলরেখায় গতি (Motion in a straight line with uniform acceleration)

যদি u=প্রারম্ভিক বেগ, t=সময়, f=সমত্বরণ, v=অন্তিম বেগ এবং s=সরণ হয়, তাহা হইলে

$$v = u + ft \quad .... \quad (1)$$
$$s = ut + \tfrac{1}{2}ft^2 \quad .... \quad (2)$$
$$v^2 = u^2 + 2fs \quad .... \quad (3)$$

[অনু : 5-1]

t-তম সেকেণ্ডে সরণ $= u + \frac{1}{2}f(2t-1)$ [অনু : 5-2]

3. অভিকর্ষহেতু উল্লম্ব গতি (Vertical motion under gravity)

[এই পুস্তকে g-এর মান এফ্. পি. এস্. এককে 32 ফু./সে^{2}.
সি. জি. এস্. এককে 980 সে. মি./ সে.^{2} ধরা হইয়াছে।]

(ক) (নিম্নাভিমুখী গতি)

স্থিরাবস্থা হইতে t সময়ে অর্জিত বেগ $= gt$

h উচ্চতা হইতে পতনজ বেগ $= \sqrt{2gh}$.

(খ) (উচ্চাভিমুখী গতি) (u বেগে উর্ধ্বাভিমুখে প্রক্ষিপ্ত)

চরম উচ্চতায় পৌঁছিতে সময় (Time to attain greatest height) $= \dfrac{u}{g}$

চরম উচ্চতা (Greatest height attained) $= \dfrac{u^2}{2g}$

উত্থিতি কাল (Time of flight) $= \dfrac{2u}{g}$ [অনু : 6-9, 6-10, 6-11]

(*ii*) 5 মিনিট = 5 × 60 = 300 সেকেণ্ড ;
$s = vt = 88 \times 300$ ফুট = 26400 ফুট ।

2-9. বেগ ও ত্বরণের একক পরিবর্তন ঃ

উদাহরণ ঃ (1) একটি বিন্দুর বেগ সেকেণ্ডে 44 ফুট। ইহাকে (i) মাইল-ঘণ্টা এককে এবং (ii) গজ-মিনিট এককে পরিবর্তিত কর।

উ। (i) 1 সেকেণ্ডে সরণ = 44 ফুট।

60 × 60 সেকেণ্ডে বা 1 ঘণ্টায় সরণ = 44 × 60 × 60 ফুট

$= \frac{44 \times 60 \times 60}{3 \times 1760}$ মাইল

= 30 মাইল।

∴ বেগ ঘণ্টায় 30 মাইল।

(ii) 1 সেকেণ্ডে সরণ = 44 ফুট ;

60 সেকেণ্ডে বা 1 মিনিটে সরণ = 44 × 60 ফুট

$= \frac{44 \times 60}{3}$ গজ

= 880 গজ।

∴ বেগ মিনিটে 880 গজ।

লক্ষ্য কর ঃ বেগ সেকেণ্ডে 44 ফুট = মিনিটে 880 গজ

= ঘণ্টায় 30 মাইল।

(2) 32 ফুট/সে.^{2} ত্বরণকে (i) সেন্টিমিটার-সেকেণ্ড এককে, এবং (ii) গজ-মিনিট এককে পরিবর্তিত কর।

উ। (i) এখানে কেবল ফুটকে সেন্টিমিটারে পরিবর্তিত করিতে হইবে
1 ইঞ্চি = 2·54 সেন্টিমিটার (আসন্ন মান) ;

∴ 1 ফুট = 2·54 × 12 = 30·48 সেন্টিমিটার ;
32 ফুট = 30·48 × 32 = 975·36 সেন্টিমিটার।

∴ নির্ণেয় ত্বরণ $= \frac{975 \cdot 36 \text{ সেন্টিমিটার}}{\text{সেকেণ্ড}^2}$

(ii) 1 সেকেণ্ডে বেগের পরিবর্তন = সেকেণ্ডে 32 ফু. বেগ ;

1 মিনিটে বেগের পরিবর্তন = সেকেণ্ডে (32 × 60) ফু. বেগ

= মিনিটে (32 × 60) × 60 ফু. বেগ

= মিনিটে $\frac{32 \times 60 \times 60}{3}$ গজ বেগ

= মিনিটে 38400 গজ বেগ

নির্ণেয় ত্বরণ $= \frac{38400 \text{ গজ}}{\text{মিনিট}^2}$

অর্থাৎ, মিনিটে প্রতি মিনিটে 38400 গজ (38400 yds. per min. per min.)

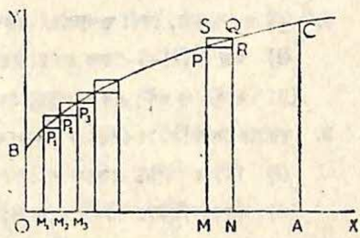
*2-10. সময়-বেগ লেখ (Time-Velocity Graph) :

দুইটি সরল রেখা OX এবং OY পরস্পর লম্বভাবে লও। X-অক্ষ বরাবর সময় এবং Y-অক্ষ বরাবর বেগ প্রদর্শন করা হইল।

মনে কর, OM_1, OM_2, OM_3···ইত্যাদি 1, 2, 3,···সেকেণ্ড সময় নির্দেশ করে ; এইরূপে OM যে-কোন একটি সময় t নির্দেশ করে।

উল্লিখিত সময়ে যদি M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3···এবং MP বেগ নির্দেশ করে তাহা হইলে P_1, P_2, P_3···P প্রভৃতি বিন্দু যে-রেখার উপর থাকে তাহা **সময় বেগ লেখ। এই লেখ-চিত্রের উপর যে-কোন বিন্দুর ভুজ সময় এবং কোটি সেই সময়ের বেগ।**

আমরা দেখাইব যে OB, OA, AC এবং BC রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র OA সময়ের সরণ (displacement) প্রদর্শন করে।



MP-র নিকটে NQ একটি কোটি লও। OM সময়ে বেগ MP এবং ON সময়ে বেগ NQ ; OM সময়ের পর এবং ON সময়ের পূর্বে যে-কোন মুহূর্তে বেগ MP অপেক্ষা বেশি এবং NQ অপেক্ষা কম। অতএব MN সময়ের সরণ MP×MN অপেক্ষা বেশি এবং NQ×MN অপেক্ষা কম। সমস্ত সময়কে কতকগুলি সমান ক্ষুদ্র ভাগে ভাগ করিলে ইহাদের প্রত্যেকের বেলা এই রকম হইবে।

অতএব, OA সময়ের সরণ, ভিতরের আয়তক্ষেত্রগুলির যোগফল অপেক্ষা বেশি এবং বাহিরের (যথা, MNQS আয়তক্ষেত্র) আয়তক্ষেত্রগুলির যোগফল অপেক্ষা কম। এখন যদি সময় OA-কে অসংখ্য ভাগে ভাগ করা হইয়াছে মনে করি তাহা হইলে দুই শ্রেণীর আয়তসমষ্টি পরস্পরের সন্নিহিত হয় এবং উভয়েই রেখার নীচের OACB ক্ষেত্রের সন্নিধি লাভ করে। অতএব OA **সময়ের সরণ** OACB **ক্ষেত্রের পরিমাপের সমান।**

4. **ভরবেগ** (Momentum) = ভর × বেগ = mv [অনু : 8-1]

5. **বল** (Force) = ভর × ত্বরণ

$P = mf$ [অনু : 8-7]

6. **ভার** = ভর × অভিকর্ষজ ত্বরণ $W = mg$ [অনু : 8-9]

7. **ঘাত** (Impulse of a force) = Pt.

$= m(v - u)$ [অনু : 9-1]

8. কার্য = বল × বলের অভিমুখে সরণ = Ps. [অনু : 10-2]

স্থৈতিক শক্তি (h উচ্চতায় উত্থিত বস্তুর) = mgh [অনু : 10-6]

গতীয় শক্তি (Kinetic Energy) = $\frac{1}{2}mv^2$ [অনু : 10-7]

গতীয় শক্তির বৃদ্ধি = প্রযুক্ত বলের দ্বারা কৃত কার্য [অনু : 10-9]

9. **প্রাস** (Projectile) :

প্রক্ষেপ বেগ u এবং প্রক্ষেপ কোণ α হইলে

চরম উচ্চতা (Greatest height attained) $= \dfrac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

চরম উচ্চতা লাভের সময় (Time to attain greatest height) $= \dfrac{u \sin \alpha}{g}$

উত্থিতিকাল (Time of flight) $= \dfrac{2u \sin \alpha}{g}$

অনুভূমিক প্রক্ষেপ সীমা (Horizontal Range) $= \dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$

বৃহত্তম অনুভূমিক প্রক্ষেপ সীমা $= \dfrac{u^2}{g}$

[অনু : 7-10, 7-11 এবং 7-12]

[স্থিতিবিদ্যা]

1. **দুই বলের লব্ধি :**

পরস্পর α কোণে নত P এবং Q বলের লব্ধি R হইলে

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha \quad .... \quad (1)$$

লব্ধি বলের দিক্ P-বলের সঙ্গে θ কোণ করিলে

$$\tan \theta = \frac{Q \sin \alpha}{P + Q \cos \alpha}.$$ [অনু : 11-24]

বল দুইটি লম্বাভিমুখী হইলে অর্থাৎ যখন $\alpha = 90°$

$R^2 = P^2 + Q^2$ এবং $\tan \theta = \frac{Q}{P}$.

2. **বিশ্লেষিতাংশ :**

যে দিক্ F বলের সঙ্গে α কোণ করে সেদিকে এবং তাহার লম্বাভিমুখী দিকে F বলের বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে F $\cos\alpha$ এবং F $\sin\alpha$. [অনু: 12-2]

উপাংশ :

যে দুই দিক্ F বলের সঙ্গে α এবং β কোণ করে সেই দুই দিকে F বলের উপাংশ যথাক্রমে $\dfrac{F\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ এবং $\dfrac{F\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ [অনু : 12-8]

3. **ল্যামির সূত্র :**

O বিন্দুতে ক্রিয়মান তিনটি বল P, Q এবং R সাম্যাবস্থায় থাকিলে

$$\frac{P}{\sin QOR}=\frac{P}{\sin ROP}=\frac{R}{\sin FOQ}$$ [অনু : 11-20]

4. **ভারকেন্দ্র :**

এক সরলরেখায় অবস্থিত কণাসমূহের ভারকেন্দ্র

$$\bar{x}=\frac{W_1x_1+W_2x_2+W_3x_3+\cdots\cdots}{W_1+W_2+W_3}$$ [অনু : 17-15]

প্রয়োজনীয় ত্রিকোণমিতির সূত্র

1. **ত্রিভুজের বাহু এবং কোণের সম্বন্ধ :**

ত্রিভুজের A, B, C কোণের বিপরীত বাহু যথাক্রমে a, b, c দ্বারা নির্দেশ করা হইলে

(i) $$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

(ii) তিনটি বাহু দেওয়া থাকিলে কোণ নির্ণয়ের জন্য

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

2. **ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল** $=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$

(যে কোণ দুই বাহু তাহাদের অন্তর্ভূত কোণের সাইনের গুণফলের অর্ধেক।)

---

1 ফুট $=30{\cdot}48$ সেন্টিমিটার

1 ইঞ্চি $=2{\cdot}54$ সেন্টিমিটার

1 মিটার $=39{\cdot}37$ ইঞ্চি $=3{\cdot}28$ ফুট

1 কি. মি. (Kilometre) $=0{\cdot}6214$ মাইল $=\frac{5}{8}$ মাইল (স্থূলমান)

5 মাইল $=8$ কি. মি.

1 পাউণ্ড $=453{\cdot}6$ গ্রাম

1 কি. গ্রাম (1 Kg.) $=3{\cdot}2046$ পাউণ্ড।

(স্থূলমান $=2{\cdot}2$ পাউণ্ড)

1 টন $=2240$ পাউণ্ড

1 হন্দর (Hundred-weight) $=112$ পাউণ্ড

ঘণ্টায় 60 মাইল বেগ = সেকেণ্ডে 88 ফুট বেগ।

$\sqrt{2}=1{\cdot}414$, $\sqrt{3}=1{\cdot}732$

এই পুস্তকে নীচের গ্রীক বর্ণ তিনটির ব্যবহার আছে ঃ

α (আল্‌ফা) ; β (বিটা) ; θ (থিটা)

সূচীপত্র

গতিবিদ্যা

স্থিতিবিদ্যা

বলবিদ্যা প্রবেশ

সূচনা

1. বিজ্ঞানের যে বিভাগ গতি ও বলপ্রয়োগ বিষয়ে আলোচনা করে তাহার নাম **বলবিদ্যা** (Mechanics)। একসময়ে বলবিদ্যা বলিতে যন্ত্র-নির্মাণ-বিদ্যা বুঝাইত।

বলবিদ্যার দুই শাখা : (1) **গতিবিদ্যা** (Dynamics) ও (2) **স্থিতিবিদ্যা** (Statics)।

(1) **গতিবিদ্যা** গতিশীল বস্তু নিয়া আলোচনা করে। ইহাকে আবার **স্থিতিবিদ্যা** বা **কাইনেমেটিক্স্** (Kinematics) ও **কাইনেটিক্স্** (Kinetics) এই দুই অংশে ভাগ করা হয়।

স্থিতিবিদ্যা অংশে কি কারণে গতি বা কাহার গতি এই সমস্ত বিষয়ের কোন আলোচনা করা হয় না ; কেবলমাত্র গতির ধর্ম (properties) আলোচনা করা হয়।

কাইনেটিক্স্ অংশে গতিকে কারণসহ আলোচনা করা হয়। ঐ অংশে বস্তুর ভর ও তাহার উপর প্রযুক্ত বলের আলোচনা হয়।

(2) **স্থিতিবিদ্যা** বলসমূহের প্রয়োগে বস্তুর স্থিরাবস্থার আলোচনা করে।

[বলবিদ্যার উৎপত্তি ভারী জিনিস উত্তোলন করিবার যন্ত্র নির্মাণের উদ্যম হইতে। ইহা সুপ্রাচীন বিদ্যা। মিশরের পিরামিড (3650 খৃষ্ট পূর্বাব্দ) নির্মাণ করিতে এই প্রকার যন্ত্রের বহুল প্রয়োগ হইয়াছিল, ইহা আমরা সহজে অনুমান করিতে পারি। প্রসিদ্ধ গ্রীক বিজ্ঞানী **আর্কিমেডিস্** নানাপ্রকার যন্ত্রের উদ্ভাবন করিয়াছিলেন। কিন্তু বলবিদ্যার আধুনিক যুগ মাত্র সাড়ে তিনশত বৎসর পূর্বে আরম্ভ হইয়াছে। বলা যায়, **গ্যালিলিও**-ই প্রথমে গতিতত্ত্ব আলোচনা করেন। সুসংবদ্ধ গতিবিদ্যার ভিত্তি স্থাপিত হয় **নিউটনের** সময়ে।]

2. **গতি ও স্থিতি** (Motion and Rest) :

যে বস্তু স্থান পরিবর্তন করে তাহার গতি আছে। যে বস্তু স্থান পরিবর্তন করে না তাহা স্থির।

কোন বস্তুর গতি বা স্থিতি তাহার চতুর্দিকস্থ বস্তুর অবস্থান দেখিয়া আমরা নির্ণয় করি। পৃথিবীর উপরে গাছপালা, বাড়ীঘর স্থির বা অচল; কিন্তু পৃথিবী গতিশীল—ইহা নিজ মেরুদণ্ডের উপর আবর্তন করিতেছে, অধিকন্তু সূর্যকে পরিক্রমণ করিতেছে। অতএব পৃথিবীস্থ যাবতীয় বস্তুরই এই গতি রহিয়াছে। আমরা চলন্ত রেলগাড়ীতে যখন একস্থানে স্থিরভাবে বসিয়া থাকি প্রকৃতপক্ষে তখন ঐ গাড়ীর গতি আমাদেরও গতি। আবার রেলগাড়ীর নিজের গতির সঙ্গে পৃথিবীর গতিও যুক্ত রহিয়াছে। গতি ও স্থিতি বলিতে আমরা পৃথিবীর সাপেক্ষে যে গতি বা স্থিতি তাহাই বুঝি।

3. **সংজ্ঞা ঃ**

জড় (Matter) ঃ যাহা ইন্দ্রিয় দ্বারা অনুভব করা যায় এবং যাহার ভার আছে তাহাকে জড় বা **পদার্থ** বলে।

ফল, জল, পাথর, মাটি কাগজ, বাতাস প্রভৃতি জড় বা পদার্থ। আলো, তাপ, শব্দ ইহারা পদার্থ নহে। আলো আমরা চোখে দেখি, তাপকে স্পর্শ দ্বারা অনুভব করি, শব্দ কানে শুনি, কিন্তু ইহাদের কোন ভার নাই বলিয়া ইহারা পদার্থ নহে। আবার বাতাসকে চোখে দেখি না কিন্তু যখন বাতাস জোরে প্রবাহিত হয়, তখন গাছের পাতা নড়ে এবং বাতাসের স্পর্শও অনুভব করি, অধিকন্তু বাতাসের ভার আছে। সুতরাং বাতাস পদার্থ।

পদার্থের ধারণা মানুষের সহজাত। ইহাকে সংজ্ঞা দিয়া ঠিক বুঝান যায় না।

বস্তু (Body) ঃ আকার ও আয়তন-বিশিষ্ট সীমাবদ্ধ কিছু পরিমাণ জড়কে **বস্তু** বলে।

একখণ্ড প্রস্তর, একটি পুস্তক, একটি বল, থালা, বাটি, পৃথিবী, চন্দ্র, সূর্য, তারা প্রভৃতি প্রত্যেকেই বস্তু।

ভর (Mass) ঃ কোন বস্তুতে যে পরিমাণ জড় বা পদার্থ থাকে তাহাকে ঐ বস্তুর **ভর** বলে।

কণা (Particle) ঃ বস্তুর আয়তন যদি এত ক্ষুদ্র হয় যে, তাহাকে একটি বিন্দু মনে করা যায় তবে তাহাকে **কণা** বলে। বলবিদ্যায় কণাকে একটি **ভরযুক্ত বিন্দু** বলা যায়।

বল (Force) ঃ যাহা বস্তুর স্থিরাবস্থার অথবা সমবেগে এক সরলরেখায় গতিশীল অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় বা ঘটাইতে চেষ্টা করে তাহাকে **বল** বলে।

ভার (Weight) : পৃথিবী প্রত্যেক বস্তুকে তাহার কেন্দ্রের দিকে একটা বল দিয়া আকর্ষণ করে। কোন বস্তুকে পৃথিবী যে বল দিয়া তাহার কেন্দ্রের দিকে আকর্ষণ করে সেই বলকে ঐ বস্তুর **ভার** বলে।

কোন বস্তুর ভার ঐ বস্তুর ভরের উপর অর্থাৎ বস্তুতে যে জড় বা পদার্থ থাকে তাহার উপর নির্ভর করে এবং ভার ভরের অনুপাতে হইয়া থাকে অর্থাৎ ভর দ্বিগুণ হইলে ভার দ্বিগুণ ; ভর দশগুণ হইলে ভারও দশ গুন, এই প্রকার।

ঘনাঙ্ক (Density) : কোন বস্তুর একক আয়তনে (এক ঘন ফুট বা এক ঘন সেন্টিমিটার) যে পরিমাণ জড় থাকে তাহাকে ঐ বস্তুর **ঘনাঙ্ক** বলে।

কোন বস্তুর ভর M, ঘনমান বা আয়তন V এবং ঘনাঙ্ক ρ হইলে

$$M = V\rho.$$

প্রশ্নমালা 2

1. ফুট এবং সেকেণ্ড দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক লইয়া নিম্নলিখিত বেগের মান নির্ণয় কর :—

(i) ঘণ্টায় 75 মাইল ; (ii) মিনিটে 30 গজ।

2. গজ এবং মিনিট দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক লইয়া নিম্নলিখিত বেগের মান নির্ণয় কর :—

(i) ঘণ্টায় 45 মাইল ; (ii) সেকেণ্ডে 30 ফুট।

3. মাইল এবং ঘণ্টা দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক লইয়া নিম্নলিখিত বেগের মান নির্ণয় কর :—

(i) সেকেণ্ডে 11 ফুট ; (ii) মিনিটে 88 গজ।

4. যদি একটি রেলগাড়ী সমবেগে ঘণ্টায় 30 মাইল যায়, তাহা হইলে 10 সেকেণ্ডে উহা কত দূর যাইবে ?

5. যদি একটি কণা সমবেগে মিনিটে 45 গজ যায়, তাহা হইলে উহা 36 ফুট কত সময়ে যাইবে ?

6. একটি রেলগাড়ী সমবেগে 4 সেকেণ্ডে 88 ফুট যায়। ইহার বেগ ঘণ্টায় কত মাইল ?

7. (a) কিলোমিটার এবং ঘণ্টাকে দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক লইয়া নিম্নলিখিত বেগের মান নির্ণয় কর :—

(i) সেকেণ্ডে 10 সেণ্টিমিটার ; (ii) মিনিটে 100 মিটার।

(b) আমি ঘণ্টায় 6 কিলোমিটার হাঁটি। ইহা সেকেণ্ডে কতমিটার দ্রুতি ?

8. ফুট ও সেকেণ্ড, দৈর্ঘ্য ও সময়ের একক লইয়া ত্বরণের মান 32 হইলে

(i) গজ ও মিনিট একক লইয়া ইহার মান নির্ণয় কর।

(ii) মাইল ও ঘণ্টা একক লইয়া ইহার মান নির্ণয় কর।

9. ত্বরণের সেণ্টিমিটার-সেকেণ্ড একককে

(i) মিটার-মিনিট এককে পরিণত কর,

(ii) কিলোমিটার-ঘণ্টা এককে পরিণত কর।

অনুশীলনী

1. সরণ কাহাকে বলে ?

নিম্নলিখিত রাশিগুলির সংজ্ঞা লিখ :—

(ক) দ্রুতি, (খ) বেগ, (গ) ত্বরণ

2. বেগ এবং দ্রুতির প্রভেদ কি ? যদি একটি কণার দ্রুতি সম হয়, ইহার বেগও কি সম ? উদাহরণ দিয়া বুঝাইয়া দাও।

3. সমদ্রুতি ও সমবেগের পার্থক্য পরিষ্কারভাবে বুঝাইয়া দাও।

তৃতীয় পরিচ্ছেদ

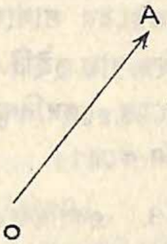
একাধিক বেগের লব্ধি এবং বেগের বিশ্লেষণ

Composition & resolution of velocities

[শব্দ পরিচিতি—স্কেলার, ভেক্টর, লব্ধি, সাইন, কস্, ট্যান, কট, সেক, কো-সেক, উপাংশ।]

[3-1. **স্কেলার (Scalar) :** যে রাশির কেবল মান আছে কিন্তু কোন দিক্ নাই তাহাকে **স্কেলার (অবাহিত) রাশি** বলে। যথা—ভর (mass), ঘনমান (volume), দ্রুতি (speed), তাপমাত্রা (temperature), কার্য (work) ইত্যাদি।

ভেক্টর (Vector) : যে রাশির মান ও দিক্ আছে তাহাকে **ভেক্টর (বাহিত) রাশি** বলে। যথা—সরণ, বেগ, ত্বরণ, বল ইত্যাদি।



কোনও ভেক্টরকে যথোচিত অভিমুখে ঐ ভেক্টরের মানের অনুপাতে অঙ্কিত একটি সরলরেখার দ্বারা প্রদর্শন করা যাইতে পারে ; তীর-চিহ্ন দ্বারা ইহার অভিমুখ নির্দেশ করা হয়।

এইজন্য ভেক্টরকে নির্দিষ্ট অভিমুখে অঙ্কিত একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সরলরেখা বলিয়া অভিহিত করা হয়। যে-কোন ভেক্টর রাশিকে চিত্রে একটি তীরের দ্বারা প্রদর্শন করা যাইতে পারে। তীরের গোড়া ইহার আদিবিন্দু এবং মাথা অন্তিমবিন্দু ; তীরের দৈর্ঘ্যকে ভেক্টরের মান বলা হয়। চিত্রে প্রদর্শিত তীর একটি ভেক্টর ; O ইহার আদিবিন্দু এবং A অন্তিমবিন্দু। $\overrightarrow{OA}$ (অথবা $\overline{OA}$) চিহ্ন দ্বারা এই ভেক্টরকে বর্ণনা করা যাইতে পারে।

উপরের তীর-চিহ্ন বুঝাইতেছে যে O হইতে আরম্ভ করিয়া A-র দিকে গেলে আমরা ভেক্টরের দিক্ পাই। $\overrightarrow{AO}$ বলিলে $\overrightarrow{OA}$-র সমান মানের এবং বিপরীত দিকে একটি ভেক্টর বুঝায়।

3-2. দুইটি **ভেক্টর রাশির যোগ** (Addition of two vectors)

সংজ্ঞা : মনে কর, $\overrightarrow{AB}$ একটি ভেক্টর। A ইহার আদিবিন্দু এবং B অন্তিমবিন্দু। একই জাতীয় আর একটি ভেক্টরের আদিবিন্দুকে B-তে

প্রথম পরিচ্ছেদ

মাপের একক
(Units)

[শব্দ-পরিচিতি : রাশি, একক, লব্ধ, সি. জি. এস্., এফ্. পি. এস্., মিটার, ভর, গ্রাম, পাউণ্ড ।]

1-1. রাশি : যাহা পরিমাপ করা যায় তাহা রাশি। দশ গজ কাপড়, দুই কিলোগ্রাম চাউল, পাঁচ মিনিট সময়, এবং অনুরূপ কথা আমরা নিয়তই ব্যবহার করি। দশ গজ, দুই কিলোগ্রাম, পাঁচ মিনিট ইহারা এক একটি রাশি। এইরকম আরও বিভিন্ন রাশি আছে।

1-2. একক : কোন রাশির পরিমাণ বা মান স্থির করিতে হইলে সেই জাতীয় একটি নির্দিষ্ট রাশি লইয়া প্রথমোক্ত রাশি এই নির্দিষ্ট রাশির কত গুণ বা কত অংশ তাহা নির্ণয় করিতে হয়। সমজাতীয় নির্দিষ্ট রাশিটিকে একক (Unit) বলা হয়। উপরের রাশিগুলিতে গজ, কিলোগ্রাম এবং মিনিট একক।

দৈর্ঘ্য, ভর এবং সময়ের একক প্রাথমিক বা মৌলিক (fundamental) একক। অন্যান্য রাশির একক প্রাথমিক একক হইতে পাওয়া যায় বলিয়া তাহাদিগকে লব্ধ বা উদ্ভূত (derived) একক বলে।

1-3. দুই পদ্ধতির একক :

একক প্রকাশের দুইটি পদ্ধতি প্রচলিত আছে :

(1) সি. জি. এস্. (C. G. S.) বা ফ্রেঞ্চ পদ্ধতি ;

(2) এফ্. পি. এস্. (F. P. S.) বা বৃটিশ পদ্ধতি।

প্রথম পদ্ধতিতে :

সি. (C) দৈর্ঘ্যের একক সেন্টিমিটার (Centimetre) শব্দের আদি অক্ষর।

জি. (G) ভরের একক গ্রাম (Gram) শব্দের আদি অক্ষর।

এস্. (S) সময়ের একক সেকেণ্ড (Second) " " "।

দ্বিতীয় পদ্ধতিতে :

এফ্. (F) দৈর্ঘ্যের একক ফুট (Foot) শব্দের আদি অক্ষর।

পি. (P) ভরের " পাউণ্ড (Pound) " " "।

এস্. (S) সময়ের " সেকেণ্ড (Second) " " "।

1-4. দৈর্ঘ্যের একক :

(ক) সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক **সেন্টিমিটার** (Centimetre)। ইহা মিটারের (Metre-এর) শতাংশ।

প্যারিসে প্লাটিনাম ধাতুর একটি দণ্ড রক্ষিত আছে। শূন্য ডিগ্রি সেন্টিগ্রেড (0°C) তাপমাত্রায় ঐ দণ্ডখানির দুই নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বকে এক **মিটার** বলা হয়। দশমিকে প্রকাশ করা হয় বলিয়া মিটারমূলক গণনা-পদ্ধতি বিজ্ঞান ও ফলিত গণিতে পৃথিবীর সর্বত্র ব্যবহৃত হয়।

মেট্রিক দশমিক পদ্ধতিতে নিম্নলিখিত শব্দার্থগুলি মনে রাখিলে সুবিধা হইবে।

ডেকা (Deca) = দশগুণ ;
হেক্টো (Hecto) = শতগুণ ;
কিলো (Kilo) = সহস্রগুণ।
ডেসি (Deci) = দশাংশ ;
সেন্টি (Centi) = শতাংশ ;
মিলি (Milli) = সহস্রাংশ।

ছোট বা বড় দৈর্ঘ্য মাপিবার জন্য মিটার ও সেন্টিমিটারের ভগ্নাংশ ও গুণিতক নিম্নে দেওয়া হইল :—

10 মিলিমিটার = 1 সেন্টিমিটার ;
10 সেন্টিমিটার = 1 ডেসিমিটার ;
10 ডেসিমিটার = 1 **মিটার**।
10 মিটার = 1 ডেকামিটার ;
10 ডেকামিটার = 1 হেক্টোমিটার ;
10 হেক্টোমিটার = 1 কিলোমিটার।

দ্রষ্টব্য : 100 **সেন্টিমিটার** = 1 মিটার
1000 **মিলিমিটার** = 1 মিটার
1 **কিলোমিটার** = 1000 মিটার।

*পৃথিবীর পরিধি প্রায় চার কোটি মিটার। প্রথমতঃ পৃথিবীর পরিধির এক-চতুর্থাংশের কোটি ভাগের এক ভাগ হিসাবেই মিটারের পরিকল্পনা করা হইয়াছিল।

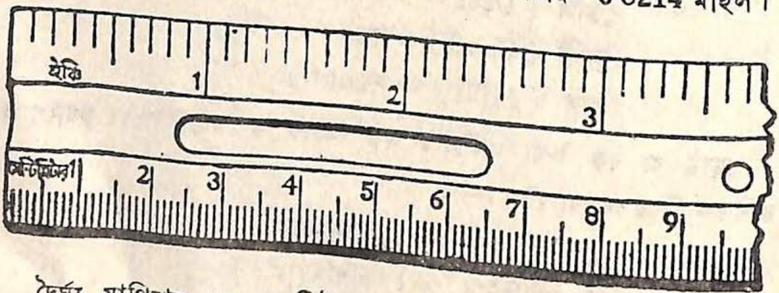
(খ) এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক **ফুট**। ইহা গজের এক-তৃতীয়াংশ।

প্রমাণ গজ (Standard Yard) : লণ্ডনের বৃটিশ এক্সচেক্বারের (British Exchequer) অফিসে রক্ষিত ব্রোঞ্জধাতু নির্মিত একটি দণ্ডের দুই নির্দিষ্ট দাগের মধ্যবর্তী দূরত্বকে (62° ফারেনহাইট তাপমাত্রায়) এক গজ বলা হয়। ইহার প্রতিরূপ লণ্ডনের রয়্যাল সোসাইটি এবং পার্লামেন্ট হাউসেও রক্ষিত আছে।

1 গজ = 3 ফুট ; 1 ফুট = 12 ইঞ্চি
1760 গজ = 1 মাইল

দুই পদ্ধতির মধ্যে সম্বন্ধ :

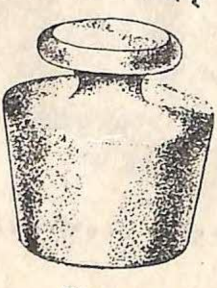
1 ইঞ্চি = 2·54 সেন্টিমিটার (সে. মি. cm.)
1 সেন্টিমিটার = 0·39371 ইঞ্চি ;
1 মিটার = 1·09363 গজ।
[1 মাইল = 1·6093 কিলোমিটার ; 1 কিলোমিটার = 0·6214 মাইল।]



দৈর্ঘ্য মাপিবার জন্য যে **মিটার স্কেল** ব্যবহৃত হয়, উহার চিত্র উপরে দেওয়া গেল।

1-5. ভরের একক :

(i) **সি. জি. এস্.** পদ্ধতিতে ভরের একককে **গ্রাম** বলে।



কিলোগ্রাম

প্যারিসে একটি প্লাটিনাম্-খণ্ড রক্ষিত আছে। ইহার ভরকে এক **কিলোগ্রাম** (kilogram) বলা হয়। **গ্রাম** হইল কিলোগ্রামের সহস্রাংশ।

1000 গ্রাম = 1 কিলোগ্রাম

গ্রামের অংশ ও গুণিতক ঃ

1 গ্রাম=1000 মিলিগ্রাম	10 গ্রাম=1 ডেকাগ্রাম ;
=100 সেন্টিগ্রাম	100 গ্রাম=1 হেক্টোগ্রাম ;
=10 ডেসিগ্রাম	1000 গ্রাম=1 কিলোগ্রাম ;

(i) **এফ্. পি. এস্.** পদ্ধতিতে ভরের একককে **পাউণ্ড** বলে।

লণ্ডনে ওয়েস্টমিনস্টারের স্ট্যাণ্ডার্ড অফিসে (Standard Office) একখণ্ড প্লাটিনাম ধাতু রক্ষিত আছে ; ইহার ভরকে এক পাউণ্ড বলা হয়। এই সম-পরিমাণ ভরবিশিষ্ট প্রত্যেক দ্রব্যেরই ভর এক পাউণ্ড। তুলাযন্ত্রে (Balance) ওজন করিয়া দুইটি বস্তুর ভর তুলনা করা হয়।



পাউণ্ড

তুলাযন্ত্রে দুইটি বস্তুর ভার (weight) সমান হইলে তাহাদের ভর (mass)-ও সমান। ভর এবং ভারের পার্থক্য পরে আলোচনা করিব।

[1 পাউণ্ড=16 আউন্স ; 1 আউন্স=16 ড্রাম]

গ্রাম ও পাউণ্ডের সম্বন্ধ ঃ

দেখা গিয়াছে, 1 পাউণ্ড=453·6 গ্রাম।

1 কিলোগ্রাম=2·2046 পাউণ্ড।

1-6. সময়ের একক ঃ

উভয় পদ্ধতিতেই সময়ের একক **সেকেণ্ড**।

মধ্যরেখা অতিক্রম করিয়া পুনঃ মধ্যরেখায় আসিতে সূর্যের যে সময় লাগে তাহাকে এক **সৌরদিন** বলে। সৌরদিনের 24 অংশের এক অংশকে বলা হয় এক ঘণ্টা (hour) ; ঘণ্টার 60 অংশের এক অংশকে বলা হয় মিনিট (minute) এবং মিনিটের 60 অংশের এক অংশ সেকেণ্ড।

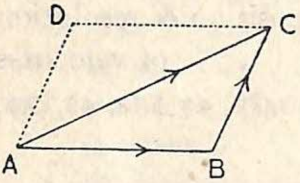
1 দিন =24 ঘণ্টা ;

1 ঘণ্টা =60 মিনিট ;

1 মিনিট=60 সেকেণ্ড।

[সৌরদিনগুলি সমপরিমাণের নহে। সেইজন্য বৎসরের সৌরদিনগুলির গড় নেওয়া হয়।]

স্থাপন কর এবং মনে কর, BC এই দ্বিতীয় ভেক্টর। AC যুক্ত কর, এখন $\vec{AC}$ ভেক্টর $\vec{AB}$ ও $\vec{BC}$ ভেক্টরের **লব্ধি** বা **যোগফল**।



অতএব একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত দুইটি বাহু $\vec{AB}$ ও $\vec{BC}$ দুইটি ভেক্টর বুঝাইলে বিপরীতক্রমে গৃহীত তৃতীয় বাহু $\vec{AC}$, উক্ত ভেক্টর দুইটির লব্ধি বা যোগফল বুঝায়। ইহাকে ভেক্টরের **ত্রিভুজ সূত্র** বলে। $\vec{AB}$ ও $\vec{BC}$ ভেক্টর দুইটি, $\vec{AC}$ ভেক্টরের **উপাংশ** (components)।

ABCD সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর। এখন AD এবং BC সমানও সমান্তরাল, অতএব, $\vec{AD}$ এবং $\vec{BC}$ একই ভেক্টর প্রদর্শন করে। তাহা হইলে $\vec{AB}$ এবং $\vec{AD}$ এই দুই ভেক্টরের লব্ধি $\vec{AC}$। ইহাকে নিম্নলিখিত সূত্রে প্রকাশ করা হয়।

ভেক্টরের সামান্তরিক সূত্রঃ যদি কোন সামান্তরিকের দুই সন্নিহিত বাহু দুইটি (এক জাতীয়) ভেক্টর প্রদর্শন করে তবে এই বাহুদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত কর্ণ তাহাদের লব্ধি প্রদর্শন করে।]

3-3. একাধিক বেগ ও তাহাদের লব্ধি (Resultant velocity)

একটি বিন্দুর যুগপৎ একাধিক বেগ থাকিতে পারে। যখন একজন লোক স্রোতযুক্ত নদীতে সাঁতার কাটে তখন তাহার যুগপৎ দুইটি বেগ রহিয়াছে ; একটি স্রোতজনিত বেগ, অপর সাঁতার কাটিয়া যাওয়ার জন্য বেগ, এই দুই বেগের ফলে উদ্ভূত বেগ তাহার প্রকৃত বেগ বা লব্ধি (resultant velocity)। স্রোতযুক্ত নদীতে স্টীমার চালানো হইতেছে ; সেই স্টীমারে একজন লোক হাঁটিয়া বেড়াইতেছে অথবা স্টীমারের পতাকাদণ্ড বাহিয়া উপর দিকে উঠিতেছে। এখানে লোকটির প্রকৃত বেগ বা লব্ধিবেগ তিনটি বেগের ফলে উদ্ভূত হইতেছে : (1) স্রোতজনিত বেগ, (2) স্টীমার চালানোর জন্য বেগ এবং তাহার নিজ চলন অথবা উপরদিকে উঠিবার বেগ।

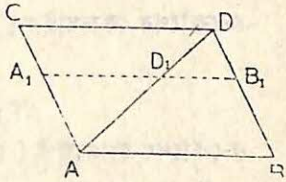
যদি কোন বস্তুর যুগপৎ দুই বা ততোধিক বেগ থাকে তাহা হইলে এই সকল বেগের মিলিত ফলে বস্তুটির যে একটা বেগ হয় (অর্থাৎ একক সময়ে যে

সরণ হয়) তাহাকে **লব্ধিবেগ** বলে। উক্ত দুই বা ততোধিক বেগ লব্ধিবেগের **উপাংশ** (components)।

3-4. বেগের সামান্তরিক সূত্র ঃ

যদি কোন কণার যুগপৎ দুইটি বেগ থাকে এবং ঐ দুই বেগের মান ও দিক্ একটি সামান্তরিকের দুই সন্নিহিত বাহু দ্বারা প্রদর্শিত হয় তাহা হইলে ঐ দুই বাহুর ছেদ-বিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত কর্ণ লব্ধিবেগের মান ও দিক্ প্রদর্শন করে।

ধর, কণার দুই বেগ u এবং v, ABCD সামান্তরিকের AB এবং AC বাহু দ্বারা প্রদর্শিত হয়।



আমরা মনে করিতে পারি যে কণাটি A হইতে আরম্ভ করিয়া AB রেখা ধরিয়া u বেগে চলিয়াছে এবং একই সময়ে AB রেখা পূর্বাবস্থানের সমান্তরাল থাকিয়া v বেগ লইয়া এমনভাবে সরিতেছে যেন A বিন্দু সর্বদা AC রেখার উপর থাকে। তাহা হইলে 1 সেকেণ্ড পরে কণাটি AB রেখা ধরিয়া যখন ইহার শেষপ্রান্তে উপস্থিত হয় তখন রেখাটি CD নূতন অবস্থানে উপস্থিত হয়। অতএব কণাটি এক সেকেণ্ড সময়ে A অবস্থান হইতে D অবস্থানে আসিয়াছে অর্থাৎ এক **সেকেণ্ডে কণার সরণ হইয়াছে** AD।

আবার, যাত্রার T সময় পরে ($T<1$ সেকেণ্ড) AB রেখাটি যদি A_1B_1 অবস্থানে আসে এবং কণাটি D_1 অবস্থানে আসে, তাহা হইলে

$$\frac{A_1D_1}{AA_1}=\frac{uT}{vT}=\frac{u}{v}=\frac{AB}{AC}=\frac{CD}{AC}$$

ইহাতে প্রমাণিত হয় যে D_1 বিন্দু AD রেখার উপর আছে, অতএব, কণার বেগের দিক্ সর্বদাই AD.

সুতরাং AD কর্ণ, u এবং v বেগ দুইটির লব্ধিবেগ প্রদর্শন করে।

[বলবিদ্যার প্রয়োগে ত্রিকোণমিতি শাস্ত্রের (Trigonometry) সমধিক ব্যবহার। ছাত্রেরা যাহাতে ত্রিকোণমিতির সহিত পরিচিত হয় এই উদ্দেশ্যে এখানে কিছু প্রাথমিক আলোচনা করা হইল।

কোণানুপাত (Trigonometrical ratios): একটি কোণ BAC লইয়া ইহাকে θ (থিটা) বলিয়া অভিহিত করি।

[θ একটি গ্রীক্ অক্ষর]

1-7. মাপের যে পদ্ধতিতে ফুট, পাউণ্ড এবং সেকেণ্ড যথাক্রমে দৈর্ঘ্য, ভর এবং সময়ের একক তাহাকে **ফুট-পাউণ্ড-সেকেণ্ড** বা **এফ্. পি. এস্.** পদ্ধতি (Foot-Pound-Second *or* F. P. S. System) বলে। ইহাকে ইংরাজী পদ্ধতি (English System)-ও বলা হয়।

মাপের যে-পদ্ধতিতে সেন্টিমিটার, গ্রাম এবং সেকেণ্ড যথাক্রমে দৈর্ঘ্য, ভর এবং সময়ের একক তাহাকে **সেন্টিমিটার-গ্রাম-সেকেণ্ড** বা **সি. জি. এস্.** পদ্ধতি (Centimetre-Gram-Second *or* C. G. S. System) বলে। ইহা ফ্রেঞ্চ বা মেট্রিক পদ্ধতি (French *or* Metric System) নামেও পরিচিত।

1-8. মেট্রিক পদ্ধতির সুবিধা ঃ

(1) মেট্রিক পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক মিটার বা তাহার শতাংশ সেন্টিমিটার এবং ভরের একক গ্রাম। উভয় ক্ষেত্রেই পরবর্তী উচ্চতর একক 10 গুণ এবং নিম্নতর একক দশমাংশ। অতএব উচ্চ বা নীচ অন্য এককে পরিণত করা সহজ। ইংরাজী পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্যের একক **ফুট** এবং ভরের একক **পাউণ্ড**। উচ্চতর বা নিম্নতর এককে পরিণত করিতে জটিল গুণ, ভাগ করা প্রয়োজন হয়।

উদাহরণ :

(i) 593·2 সেন্টিমিটারকে মিটারে পরিণত কর।

(i) [Reduce 593·2 centimetres to metres.]

উ। 593·2 সে. মি. $= \frac{593 \cdot 2}{100}$ মিটার $= 5 \cdot 932$ মিটার।

(দশমিক বিন্দু 2 ঘর বাম দিকে সরাইয়া)

(ii) 3·972 কিলোগ্রামকে গ্রামে পরিণত কর।

(ii) [Reduce 3·972 kilograms to grams.]

উ। 3·972 কিলোগ্রাম $= 3 \cdot 972 \times 1000$

$= 3972$ গ্রাম (দশমিক বিন্দু 3 ঘর ডানদিকে সরাইয়া)

কিন্তু এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে

29504 ফুটকে মাইলে পরিবর্তন বা 472 টনকে পাউণ্ডে পরিবর্তন করিতে হইলে জটিল গুণ-ভাগের প্রয়োজন।

(2) মেট্রিক পদ্ধতিতে আয়তনের একক ঘন সেন্টিমিটার এবং ভরের একক গ্রামের সম্বন্ধ অত্যন্ত সরল। এক ঘন সেন্টিমিটার জলের ভর এক গ্রাম। এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে আয়তনের একক ঘন ফুট এবং ভরের একক পাউণ্ড; এক ঘন ফুট জলের ভর 62·5 পাউণ্ড।

প্রশ্নমালা 1

1. 1 ফুটে কত সেন্টিমিটার ?
2. 1 মিটারে কত গজ ?
3. 1 আউন্সে কত গ্রাম ?

পরীক্ষাপত্র

1. একক কাহাকে বলে ? এককের প্রয়োজনীয়তা বর্ণনা কর।
2. এককের বিভিন্ন পদ্ধতি বর্ণনা কর।
3. মাপের মেট্রিক পদ্ধতির সুবিধা কি ?
4. মিটারে পরিণত কর :—
   (i) 75·32 সে. মি. ; (ii) 78927 সে. মি. ; (iii) 8·072 সে. মি. ; (iv) 32 কিলোমিটার ; (v) ·0572 কিলোমিটার।
5. সেন্টিমিটারে পরিণত কর :—
   (i) ·0123 মিটার ; (ii) 4·576 মিটার ; (iii) 75 মিটার ; (iv) ·07 কিলোমিটার ;
6. কিলোমিটারে পরিণত কর :—
   (i) 7000 মিটার ; (ii) 25000 সেন্টিমিটার ; (iii) 70032 মিলিমিটার।
7. মিলিমিটারে পরিণত কর :—
   (i) 10 সে. মি. ; (ii) 77·9 সে. মি. ; (iii) 2 মিটার।
8. গ্রামে পরিণত কর :—
   (i) 99·82 কিলোগ্রাম ; (ii) ·038 কিলোগ্রাম।
9. কিলোগ্রামে পরিণত কর :—
   (i) 70.85 গ্রাম (ii) 98405 গ্রাম।

গতিবিদ্যা
(Dynamics)

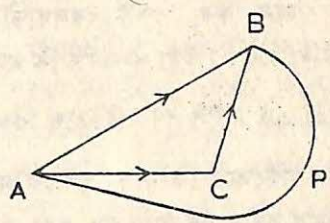
দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

দ্রুতি, বেগ ও ত্বরণ
Speed, Velocity and Acceleration

[**শব্দ-পরিচিতি** : সরণ, লব্ধি, দ্রুতি, বেগ, ত্বরণ, মন্দন]

2-1. সরণ (Displacement) : অবস্থানের পরিবর্তনকে **সরণ** বলে।

মনে কর, একটি বিন্দু A অবস্থানে আছে, কিছু সময় পরে তাহা যদি ভিন্ন অবস্থান B-তে থাকে, তাহা হইলে এই সময়ে তাহার AB সরণ হইয়াছে। এক অবস্থান হইতে ভিন্ন অবস্থানে যাইবার সময় বিন্দুটি পর পর যে সকল অবস্থানের ভিতর দিয়া যায় তাহারা যে রেখায় থাকে উহা বিন্দুটির পথ। বিন্দুটি A হইতে B-তে সোজা পথ AB ধরিয়া যাইতে পারে অথবা অন্য যে-কোন পথ ধরিয়া যাইতে পারে, যেমন A হইতে C-তে সোজা পথে গিয়া C হইতে সোজা পথে B-তে যাইতে পারে কিংবা যে-কোন বক্র পথ APB ধরিয়াও যাইতে পারে। প্রত্যেক ক্ষেত্রেই সরণ AB।



কোন বিন্দুর একই সময়ে একাধিক সরণও হইতে পারে। স্রোতযুক্ত নদীতে একজন সাঁতারু নদীর ঘাট A হইতে সাঁতার কাটিতে আরম্ভ করিল। 5 মিনিট পরে যদি সে B অবস্থানে থাকে তাহা হইলে, 5 মিনিট সময়ে তাহার সরণ হইয়াছে AB। কিন্তু এই সরণ, একই সময়ে দুইটি পৃথক্ সরণের ফলে হইয়াছে ; (1) স্রোতের গতির জন্য সরণ, (2) সাঁতার কাটার জন্য যে গতি তাহার জন্য সরণ। সরণ AB এই দুই সরণের **লব্ধি** (resultant)।

সরণ নির্দেশ করিতে মান এবং দিক্ এই দুইটিরই প্রয়োজন। যথা— (1) সরণ উত্তরদিকে 30 ফুট, (2) উপরের চিত্রে, মনে কর, AC এক নির্দিষ্ট সরলরেখা, CAB কোণ 30° এবং AB 10 ফুট দৈর্ঘ্য নির্দেশ করে, তাহা হইলে সরণ AC-র সহিত 30° নতিতে 10 ফুট।

অতএব সরণের মান ও দিক্ আছে। **কোন বিন্দুর সরণ জানিতে হইলে উহার প্রথম ও দ্বিতীয় অবস্থানের সংযোজক সরল রেখার মান ও দিক্ জানিতে হইবে।**

আর একটি দৃষ্টান্ত দেখ :

মনে কর, একটি বিন্দু A অবস্থান হইতে যাত্রা করিয়া 10 সেকেণ্ড সময়ে 50 ফুট পথ ভ্রমণ করিয়া আবার A অবস্থানে ফিরিয়া আসিয়াছে। এখানে বিন্দুটি 10 সেকেণ্ডে 50 ফুট পথ ভ্রমণ করিয়াছে বটে কিন্তু এই সময়ে তাহার সরণ 0 (শূন্য)।

2·2. **দ্রুতি** (Speed) : পথ অতিক্রমের হারকে **দ্রুতি** বলে।

কোন বস্তু সমপরিমাণ সময়ে (তাহা যত কমই হউক না কেন) যদি সমান পথ অতিক্রম করে তবে তাহা **সমদ্রুতি**। সমপরিমাণ সময়ে অসমান পথ অতিক্রম করিলে তাহার দ্রুতি অসম।

মনে কর, একটি রেলগাড়ী প্রতি ঘণ্টায় 60 মাইল পথ অতিক্রম করিতেছে। ইহা সমদ্রুতি কি না জানিতে হইলে দেখিতে হইবে প্রতি মিনিটে ইহা এক মাইল পথ যাইতেছে কি-না, প্রতি সেকেণ্ডে $\frac{1760 \times 3}{60}$ বা 88 ফুট পথ যাইতেছে কি-না। যে-কোন ক্ষুদ্র সময়ের ব্যবধানই লই না কেন সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করা চাই। তাহা হইলেই ইহা সমদ্রুতি। পথ সরল বা বক্র যাহাই হউক না কেন সমান সময়ে সমান পথ যাইতেছে কি-না ইহাই বিচার্য।

সমদ্রুতিসম্পন্ন বস্তুর দ্রুতি পরিমাপ করা হয় একক সময়ে অতিক্রান্ত পথের মান দিয়া। এক সেকেণ্ড সময়ে যত ফুট (বা, যত সেন্টিমিটার) পথ যায় তাহাই দ্রুতি; সমদ্রুতি হইলে পূর্বের উদাহরণে দ্রুতি **'সেকেণ্ডে 88 ফুট।'** ইহা অনেক সময়ে লেখা হইবে, দ্রুতি=88 ফু./সে.।

দ্রুতি অসম হইলে **কোন নির্দিষ্ট এক মুহূর্তে** দ্রুতির পরিমাপ হইবে সেই মুহূর্তের দ্রুতি লইয়া সমদ্রুতিতে এক সেকেণ্ডে যে পরিমাণ পথ অতিক্রম করিতে পারা যাইবে তাহা দিয়া।

একটি রেলগাড়ী ঘণ্টায় 40 মাইল দ্রুতিতে চলিতেছে বলিলে এইমাত্র বুঝায় যে আলোচ্য সময়ের দ্রুতি লইয়া সমদ্রুতিতে চলিলে গাড়ীটি 1 ঘণ্টায় 40 মাইল যাইবে।

2-3. **বেগ** : সরণের হারকে **বেগ** (velocity) বলে।

সরণের মান এবং দিক্ আছে সুতরাং বেগেরও মান এবং দিক্ আছে। কোন বস্তু যদি **একই দিকে** চলে এবং **সমান সময়ে** (তাহা যত ক্ষুদ্র সময়ই হউক না কেন) তাহার **সরণ সমান হয়** তাহা হইলে বস্তুটি সমবেগ-

সম্পন্ন। যদি মান বা দিক্ অথবা উভয়ের পরিবর্তন হয় তাহা হইলে বস্তুটি অসমবেগ-বিশিষ্ট।

সমবেগসম্পন্ন বস্তুর বেগ একক সময়ের সরণ দ্বারা পরিমাপ করা হয়। প্রতি সেকেণ্ডে যত ফুট (বা, যত সেন্টিমিটার) সরণ হয় তাহা বেগের মান ; এখানে দিকেরও বর্ণনা থাকিবে। যেমন বেগ 'উত্তর দিকে সেকেণ্ডে 88 ফুট'।

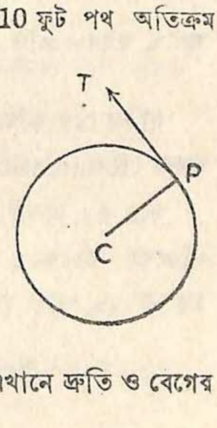
বেগ অসম হইলে কোন এক নির্দিষ্ট মুহূর্তে বেগের পরিমাপ হয়—সেই মুহূর্তের বেগ লইয়া সমবেগে চলিলে এক সেকেণ্ডে যে সরণ হইবে তাহার দ্বারা।

[লক্ষ্য কর ঃ আমরা বলিয়াছি দ্রুতি 'সেকেণ্ডে 88 ফুট'; 'বেগ উত্তরদিকে সেকেণ্ডে 88 ফুট'।]

2-4. সমদ্রুতি ও সমবেগের পার্থক্য ঃ

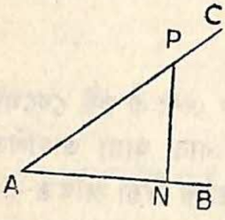
মনে কর, একটি বিন্দু এক সরলরেখা ধরিয়া উত্তর দিকে চলিয়াছে, সমান সময়ে তাহার সরণ সমান এবং এক সেকেণ্ডে সরণ 10 ফুট। এখানে বিন্দুটি সমবেগে চলিতেছে, ইহার বেগ 'উত্তরদিকে প্রতি সেকেণ্ডে 10 ফুট', আবার যেহেতু ইহা সমান সময়ে সমান পথ অতিক্রম করিতেছে এবং এক সেকেণ্ডে 10 ফুট পথ অতিক্রম করে, অতএব ইহা সমদ্রুতিসম্পন্ন এবং ইহার দ্রুতি 'সেকেণ্ডে 10 ফুট'। দ্রুতিতে দিকের কোন প্রশ্ন নাই। অন্য একটি বিন্দু যদি এক সরলরেখায় দক্ষিণদিকে যায় এবং প্রতি সেকেণ্ডে 10 ফুট যায় তাহারও দ্রুতি 'সেকেণ্ডে 10 ফুট' কিন্তু বেগ 'দক্ষিণদিকে সেকেণ্ডে 10 ফুট'। উভয়ের দ্রুতি সমান কিন্তু বেগ ভিন্ন যদিও বেগের মান একই।

আবার মনে কর, একটি ক্ষুদ্র প্রস্তরখণ্ড সূতার এক প্রান্তে বাঁধিয়া অন্য প্রান্ত ধরিয়া ঘুরানো হইতেছে। আরও মনে কর, প্রস্তরখণ্ডটি তাহার বৃত্তপথে সমান সময়ে সমান পথ যাইতেছে এবং প্রতি সেকেণ্ডে 10 ফুট পথ অতিক্রম করিতেছে। তাহা হইলে ইহা সমদ্রুতি এবং দ্রুতি সেকেণ্ডে 10 ফুট। কিন্তু যেহেতু প্রতি মুহূর্তে বেগের দিক্ পরিবর্তন হইতেছে, সুতরাং ইহা সমবেগ নয়।



চিত্রে যখন প্রস্তরখণ্ডটি P বিন্দুতে তখন তাহার বেগ PT-এর দিকে। P বিন্দুতে, আসিয়া হঠাৎ দড়ি ছিঁড়িয়া গেলে ইহা PT-এর দিকে সমবেগে সেকেণ্ডে 10 ফুট বেগে যাইবে। তাহা হইলে P বিন্দুতে বেগ 'PT-এর দিকে সেকেণ্ডে 10 ফুট।' এখানে দ্রুতি ও বেগের মান সমান।

BAC কোণের AC বাহুতে একটি বিন্দু P লই, AB-র উপর PN লম্ব টানি।



PAN সমকোণী ত্রিভুজে θ-কোণের বিপরীত বাহু PN লম্ব, θ-কোণের সন্নিহিত বাহু AN ভূমি, এবং AP অতিভুজ। ইহাদের মধ্যে যে কোন দুইটি একবারে লইয়া আমরা ছয়টি অনুপাত পাই। এই অনুপাতগুলিকে θ-কোণের **কোণানুপাত** বলা হয়। নিম্নে তাহাদের সংজ্ঞা দেওয়া হইল।

θ-কোণের সাইন (sine) সংক্ষেপে **সাইন** θ ($\sin\theta$)

$$=\frac{PN}{AP}\left(\text{অর্থাৎ } \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}\right)$$

θ-কোণের কো-সাইন (co-sine), সংক্ষেপে **কস্** θ ($\cos\theta$)

$$=\frac{AN}{AP}\left(\text{অর্থাৎ } \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}\right)$$

θ-কোণের ট্যানজেণ্ট (tangent) সংক্ষেপে **ট্যান** θ ($\tan\theta$)

$$=\frac{PN}{AN}\left(\text{অর্থাৎ } \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}\right)$$

θ-কোণের কো-ট্যানজেণ্ট (co-tangent) সংক্ষেপে **কট** θ ($\cot\theta$)

$$=\frac{AN}{PN}\left(\text{অর্থাৎ } \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}}\right)$$

θ-কোণের সেকাণ্ট (secant) সংক্ষেপে **সেক** θ ($\sec\theta$)

$$=\frac{AP}{AN}\left(\text{অর্থাৎ } \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}}\right)$$

θ-কোণের কো-সেকাণ্ট (co-secant) সংক্ষেপে **কো-সেক** θ ($\operatorname{cosec}\theta$)

$$=\frac{AP}{PN}\left(\text{অর্থাৎ } \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}}\right)$$

কতিপয় প্রয়োজনীয় সম্বন্ধ :

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}\,;\ \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}\,;\ \operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$

$$\tan\theta=\frac{PN}{AN}=\frac{\frac{PN}{AP}}{\frac{AN}{AP}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

উপরের চিত্রে PN, AN এবং AP-কে p, b এবং h দ্বারা নির্দেশ করি, সমকোণী ত্রিভুজ PAN হইতে

$$p^2+b^2=h^2$$

উভয় দিকে h^2 দ্বারা ভাগ করিয়া

$$\frac{p^2}{h^2}+\frac{b^2}{h^2}=1$$

$$\left(\frac{p}{h}\right)^2+\left(\frac{b}{h}\right)^2=1$$

$$(\sin\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$$

ইহা লিখা হয় $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ... (1)

উভয়দিকে b^2 দিয়া ভাগ করিলে পাওয়া যায়

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta. \quad (2)$$

উভয়দিকে p^2 দিয়া ভাগ করিলে পাওয়া যায়

$$\text{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta. \quad (3)$$

কয়েকটি প্রয়োজনীয় কোণানুপাত—

কোণ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
সাইন	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
কো-সাইন	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
ট্যানজেণ্ট	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

সাইন $(90°-\theta)$ = কস্ θ ; কস্ $(90°-\theta)$ = সাইন θ

সাইন $(180°-\theta)$ = সাইন θ ; কস্ $(180°-\theta)$ = $-$কস্ θ

ত্রিভুজের বাহু ও কোণ

I সাইন নিয়ম : $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

II কো-সাইন নিয়ম : $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2ab}$;

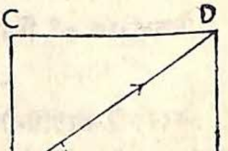
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\ ; \quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\ ]$$

দুইটি বেগের লব্ধি নির্ণয়

3·5. একটি বিন্দুর দুইটি বেগ u এবং v পরস্পরের সহিত সমকোণ করিয়া আছে ; লব্ধিবেগ w নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, AB এবং AC যথাক্রমে u এবং v বেগ দুইটি প্রদর্শন করে। ABCD সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর। বেগের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে কর্ণ AD লব্ধিবেগ (w) প্রকাশ করে। AD রেখা AB রেখার সহিত যে-কোণ করে তাহাকে θ দ্বারা নির্দেশ করা হইল। w এবং θ নির্ণয় করিতে হইবে।

যেহেতু BD এবং AC সমান ও সমান্তরাল অতএব BD রেখাও v বেগ প্রদর্শন করে।



সমকোণী ত্রিভুজ ABD হইতে

$AD^2 = AB^2 + BD^2$;

অর্থাৎ, $w^2 = u^2 + v^2 \quad \cdots(1)$

$\therefore \quad w = \sqrt{u^2 + v^2}$

আবার, $\tan\theta = \frac{BD}{AB} = \frac{AC}{AB} = \frac{v}{u} \cdots (2)$

প্রথম সমীকরণ হইতে লব্ধি বেগের মান এবং দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে তাহার দিক্ পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য : এই দুই সমীকরণ যত্নের সহিত স্মরণ রাখিতে হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত : বেগ দুইটির প্রত্যেকের মান u হইলে

$w^2 = u^2 + u^2 = 2u^2$

$\therefore \quad w = u\sqrt{2}$ এবং $\tan\theta = \frac{u}{u} = 1$; $\theta = 45°$

উদাহরণ : u যদি ঘণ্টায় 4 মাইল হয় এবং v ঘণ্টায় 3 মাইল হয় তাহা হইলে,

$w^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 = 5^2$ অর্থাৎ $w = 5 \cdots (1)$

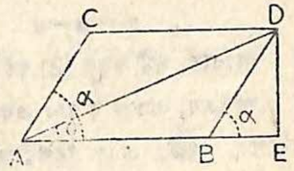
$\tan\theta = \frac{v}{u} = \frac{3}{4} \quad \cdots(2)$

$\therefore$ লব্ধিবেগ প্রথম বেগের সহিত θ কোণ করিয়া ঘণ্টায় 5 মাইল।

(θ এমন একটি কোণ যাহার ট্যানজেণ্ট $\frac{3}{4}$; এই কোণকে $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ লিখিয়া প্রকাশ করা যায়।)

3·6. একটি বিন্দুর দুইটি বেগ u এবং v পরস্পরের সহিত α কোণ করিয়া আছে, লব্ধিবেগ w নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, AB এবং AC যথাক্রমে u এবং v বেগ দুইটি প্রদর্শন করে।



ABCD সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর। বেগের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে কর্ণ AD লব্ধিবেগ (w) প্রদর্শন করে।

আবার, যেহেতু BD রেখা AC-র সমান ও সমান্তরাল, অতএব, BD রেখাও v-বেগ প্রদর্শন করে।

AD রেখা AB-র সঙ্গে যে-কোণ করে তাহা θ দ্বারা নির্দেশ করা হইল।

w এবং θ নির্ণয় করিতে হইবে।

D হইতে (বর্ধিত) AB-র উপর DE লম্ব টান।

এখন, সমকোণী ত্রিভুজ AED হইতে

$$\begin{aligned} AD^2 &= AE^2 + ED^2 \\ &= (AB + BE)^2 + ED^2 \\ &= AB^2 + 2AB.BE + BE^2 + BD^2 \\ &= AB^2 + 2AB.\frac{BE}{BD}BD + BD^2 \\ &= AB^2 + 2AB.\cos\alpha.BD + BD^2 \\ &= AB^2 + BD^2 + 2AB.BD\cos\alpha \end{aligned}$$

অর্থাৎ, $w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$ $\quad\cdots(1)$

$$\text{আবার, } \tan\theta = \frac{ED}{AE} = \frac{ED}{AB+BE} = \frac{BD.\frac{ED}{BD}}{AB + BD.\frac{BE}{BD}}$$

$$= \frac{BD\sin\alpha}{AB + BD\cos\alpha} = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha} \quad\cdots(2)$$

প্রথম সমীকরণ হইতে লব্ধিবেগের মান এবং দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে তাহার দিক্ পাওয়া যায়।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ (1) যখন $\alpha = 0$ অর্থাৎ দুইটি বেগ u এবং v একই দিকে

তখন $w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos 0$

$= u^2 + v^2 + 2uv$ (কারণ, $\cos 0 = 1$)

$= (u+v)^2$

$\therefore\ w = u + v$

(ii) যখন $\alpha=180°$ অর্থাৎ দুইটি বেগ বিপরীতমুখী

তখন $w^2=u^2+v^2+2uv\cos 180°$

$=u^2+v^2-2uv$ (যেহেতু, $\cos 180°=-1$)

$=(u-v)^2$

$\therefore \quad w=u-v$

আবার, সমীকরণ (2) হইতে দেখানো যায় উভয় ক্ষেত্রেই $\theta=0$

অতএব, একটি কণার একই দিকে দুইটি বেগ থাকিলে তাহাদের লব্ধি দুই বেগের সমষ্টি, এবং বিপরীতমুখী দুইটি বেগের লব্ধি, বেগ দুইটির অন্তর।

উদাহরণ : মনে কর, স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 2 মাইল ; একজন লোক ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে স্রোতের দিকে নৌকা চালাইলে এক ঘণ্টা পরে যাত্রাস্থান হইতে $3+2=5$ মাইল নীচে গিয়া পৌছিবে অর্থাৎ লব্ধিবেগ ঘণ্টায় 5 মাইল।

স্রোতের বিপরীত দিকে নৌকা চালাইলে এক ঘণ্টা পরে যাত্রাস্থান হইতে উপরদিকে $3-2=1$ মাইল গিয়া পৌছিবে অর্থাৎ লব্ধি বেগ ঘণ্টায় 1 মাইল।

দ্রষ্টব্য : এই অনুচ্ছেদের সূত্র (1) এবং (2)-তে $\alpha=90°$ করিয়া 5-6 অনুচ্ছেদের সূত্র দুইটি পাইতে পারি।

3-7. দুইটি বেগের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধি :

একটি কণার দুইটি বেগ u এবং v হইলে লব্ধিবেগ w-র জন্য

$$w^2=u^2+v^2+2uv\cos\alpha$$

u এবং v-র মান দেওয়া আছে ; সুতরাং $\cos\alpha$ যখন বৃহত্তম অর্থাৎ 1 তখন w বৃহত্তম এবং $\cos\alpha$ যখন ক্ষুদ্রতম অর্থাৎ -1, তখন w ক্ষুদ্রতম হইবে।

প্রথম ক্ষেত্রে $w^2=u^2+v^2+2uv=(u+v)^2$

$\therefore \quad w=u+v$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $w^2=u^2+v^2-2uv=(u-v)^2$

$\therefore \quad w=v-v$

লক্ষ্য কর : প্রথম ক্ষেত্রে $\alpha=0$ এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $\alpha=180°$

দুইটি বেগ একই দিকে হইলে লব্ধি বৃহত্তম।

দুইটি বেগ বিপরীত দিকে হইলে লব্ধি ক্ষুদ্রতম।

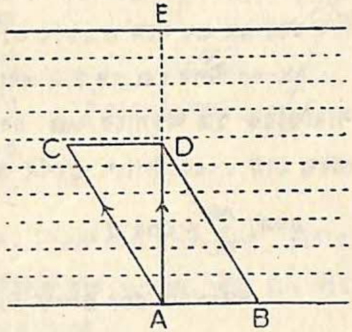
3-8. উদাহরণ :

একজন সাঁতারু ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে সাঁতার কাটিতে পারে। স্রোতের বেগ যদি ঘণ্টায় $1\frac{1}{2}$ মাইল হয়, তাহা হইলে স্রোতের দিকের সঙ্গে কত কোণে

সাঁতার কাটিলে সে অপর পারে যাত্রাস্থানের সোজা বিপরীত স্থলে গিয়া পৌঁছিবে ?

মনে কর, AB-স্রোতের বেগ প্রদর্শন করে, লব্ধি বেগ AB-র লম্বাভিমুখে AE-র দিকে।

ABCD সামান্তরিক আঁক যেখানে BD = 2AB = AC (BD সাঁতারুর বেগ AC-র সমান ; AC ঘণ্টায় 3 মাইল বেগ প্রদর্শন করে)



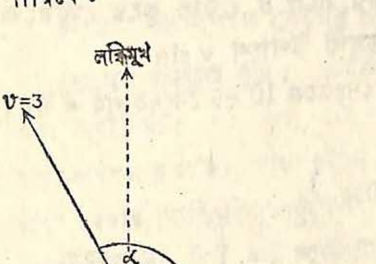
তাহা হইলে AC সাঁতারুর বেগ এবং AD লব্ধিবেগ প্রদর্শন করিবে।

সাঁতারুর দিক্ যদি স্রোতের দিকের সঙ্গে α-কোণ করে তাহা হইলে $\angle ABD = 180° - \alpha$.

এখন, $\cos ABD = \frac{AB}{BD} = \frac{1\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2} = \cos 60°$

$\angle ABD = 60°$, তাহা হইলে $\alpha = 120°$

[* ত্রিকোণমিতিতে অগ্রসর ছাত্র প্রশ্নটি নিম্ন প্রক্রিয়ায় সমাধান করিতে পারিবে :—



$\tan\theta = \frac{v \sin\alpha}{u + v\cos\alpha}$ সূত্রে,

এখানে $\theta = 90°$, $u = 1\frac{1}{2}$, $v = 3$

α নির্ণয় করিতে হইবে।

$$\tan 90° = \frac{3\sin\alpha}{1\frac{1}{2} + 3\cos\alpha}$$

অথবা $\cot 90° = \frac{1\frac{1}{2} + 3\cos}{3\sin\alpha}$

কিন্তু $\cot 90° = 0$ $\quad\therefore\quad 1\frac{1}{2} + 3\cos\alpha = 0$.

ইহা হইতে $\cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos 120°$

$\therefore\ \alpha = 120°$]

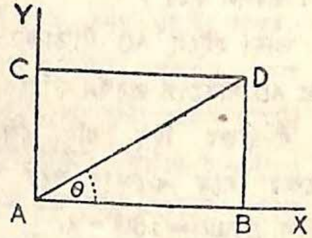
3-9. বেগের বিশ্লেষণ বা উপাংশ নির্ণয় (Resolving a given velocity) :

লব্ধিবেগ দেওয়া থাকিলে দুইটি প্রদত্ত দিকে তাহার উপাংশ নির্ণয় করিতে পারা যায়।

দুইটি পরস্পর লম্বাভিমুখী দিকে উপাংশ নির্ণয় সর্বাধিক প্রয়োজনীয়। প্রথমে ইহার আলোচনা করিব।

মনে কর, AD সরলরেখা প্রদত্ত বেগ V প্রদর্শন করে। AX এবং AY পরস্পর লম্বাভিমুখী দুইদিকে V-এর উপাংশ নির্ণয় করিতে হইবে। V-এর দিক্ যেন AX-এর সঙ্গে θ কোণ করিয়া আছে।

AX-এর উপর DB লম্ব টান এবং ABDC আয়তক্ষেত্র সম্পূর্ণ কর। বেগের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে AB এবং AC প্রদত্ত বেগ V-এর উপাংশ প্রদর্শন করে।



এখন, $\dfrac{AB}{AD} = \cos\theta$;

$\therefore \quad AB = AD\cos\theta = V\cos\theta$

এবং $AC = BD = \dfrac{BD}{AD} \cdot AD$

$= AD\sin\theta = V\sin\theta.$

তাহা হইলে নিম্নলিখিত প্রয়োজনীয় সূত্রটি পাওয়া গেল।

সূত্র ঃ একটি বেগ V-কে দুই পরস্পর লম্বাভিমুখী দিকে বিশ্লেষিত করিলে যে দিক্ V-এর সঙ্গে θ কোণ করে সেদিকে উপাংশ $V\cos\theta$ এবং ইহার লম্বাভিমুখী উপাংশ $V\sin\theta$.

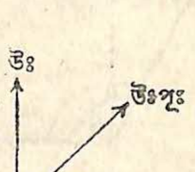
3-10. উদাহরণ ঃ উত্তর-পূর্বদিকে সেকেণ্ডে 10 ফুট বেগের পূর্ব ও উত্তর দিকে উপাংশ নির্ণয় কর।

পূর্বদিকে উপাংশ $= 10\cos 45° = 10 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= 5\sqrt{2}$ ফু/সে.;

উত্তরদিকে উপাংশ $= 10\sin 45° = 10 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= 5\sqrt{2}$ ফু/সে.।



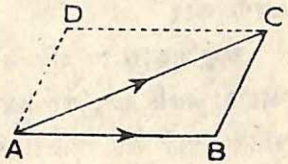
3-11. দুইটি বেগের লব্ধি নির্ণয় (প্রকারান্তর) ঃ লৈখিক নিয়ম (Graphical method) :

বেগের ত্রিভুজ সূত্র ঃ

একটি কণার যদি যুগপৎ দুইটি বেগ থাকে এবং বেগ দুইটি যদি কোন ত্রিভুজ ABC-র ক্রমানুসারে গৃহীত দুইটি বাহু AB, BC দ্বারা

প্রদর্শিত হয় তাহা হইলে (বিপরীতক্রমে গৃহীত) তৃতীয় বাহু AC, লব্ধি বেগের দিক্ ও মান প্রদর্শন করে।

সামান্তরিক ABCD সম্পূর্ণ কর; যেহেতু AD রেখা BC-র সমান ও সমান্তরাল, অতএব, BC যেই বেগ বুঝায় AD-ও সেই বেগ প্রদর্শন করিতে পারে। এখন বেগের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে AB এবং AD-র লব্ধি বেগের মান ও দিক্ AC রেখার দ্বারা নির্দেশিত হয়। অতএব, AB ও BC যে দুইটি বেগ বুঝায়, সেই দুই বেগের লব্ধির মান ও দিক্ AC রেখার দ্বারা প্রদর্শিত হয়।

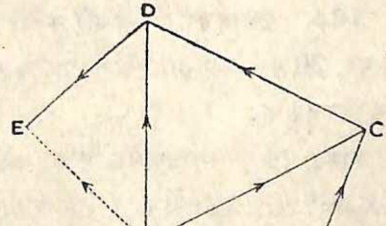


অনুসিদ্ধান্ত: একটি বিন্দুর যদি যুগপৎ তিনটি বেগ থাকে এবং তাহারা কোন ত্রিভুজ ABC-র ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহু AB, BC এবং CA দ্বারা প্রদর্শিত হয়, তাহা হইলে বিন্দুটি স্থিরাবস্থায় থাকিবে।

প্রমাণ: AB এবং BC রেখা যে দুইটি বেগ বুঝায় তাহাদের লব্ধি AC রেখাদ্বারা প্রদর্শিত হয়। সুতরাং বিন্দুটির লব্ধিবেগ AC এবং CA রেখার দ্বারা প্রদর্শিত বেগের লব্ধি। কিন্তু ইহারা সমান ও বিপরীতমুখী বেগ। অতএব, বিন্দুটি স্থিরাবস্থায় থাকে।

3-12. বহুসংখ্যক বেগের লব্ধি নির্ণয়:

বেগের বহুভুজ সূত্র: একটি কণার যদি যুগপৎ বহুসংখ্যক বেগ থাকে এবং তাহাদিগকে AB, BC, CD, DE···ইত্যাদি ক্রমানুসারে গৃহীত রেখার দ্বারা প্রদর্শন করা হয়, তাহা হইলে প্রথম রেখার আদি বিন্দু এবং শেষ রেখার অন্তিম বিন্দু যুক্ত করিয়া যে-রেখা পাওয়া যায় তাহা লব্ধি বেগের মান ও দিক্ প্রদর্শন করে।



মনে কর, কণার চারিটি বেগ আছে এবং ইহারা AB, BC, CD, DE ক্রমে গৃহীত রেখাগুলির দ্বারা প্রদর্শিত হয়। তাহা হইলে প্রমাণ করিতে হইবে যে AE রেখা লব্ধি বেগের মান ও দিক প্রদর্শন করে।

AC, AD যুক্ত কর।

এখন AC রেখা AB ও BC বেগের লব্ধি প্রদর্শন করে, আবার, AD রেখা AC ও CD বেগের লব্ধি প্রদর্শন করে। অতএব, AD রেখা AB, BC, CD বেগের লব্ধি প্রদর্শন করে। এইরূপে AE রেখা AD ও DE বেগের লব্ধি অর্থাৎ AE রেখা AB, BC, CD, DE দ্বারা প্রদর্শিত বেগ চারিটির লব্ধির মান ও দিক প্রদর্শন করে

অনুসিদ্ধান্তঃ যদি একটি কণার যুগপৎ বহুসংখ্যক বেগ থাকে এবং তাহারা একটি বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলির দ্বারা প্রদর্শিত হয় তাহা হইলে কণাটি স্থিরাবস্থায় থাকে।

3-13. লব্ধি বেগ নির্ণয়ের গাণিতিক পদ্ধতি ঃ

যদি একটি কণার একই সমতলে যুগপৎ বহুসংখ্যক বেগ থাকে, তাহাদের লব্ধি নিম্ন প্রক্রিয়ায় নিরূপিত হইতে পারে।

XOX′ এবং YOY′ দুইটি লম্বচ্ছেদী সরলরেখা লও।

3-9 অনুচ্ছেদের প্রণালী অনুযায়ী ঐ দুই রেখা বরাবর প্রত্যেক বেগের উপাংশ নির্ণয় কর।

মনে কর, XOX′ রেখা বরাবর উপাংশ সমূহের সমষ্টি U
YOY′ " " " " V

লব্ধি বেগ W যদি OX-এর সঙ্গে θ কোণ করে, তাহা হইলে

$$W^2 = U^2 + V^2 \cdots (1)$$

$$\tan\theta = \frac{V}{U} \cdots (2)$$

3-14. উদাহরণঃ একটি কণার একই সমতলে তিনটি বেগ সেকেণ্ডে 10 ফুট, 20 ফুট এবং 30 ফুট পরস্পরের সহিত 120° কোণে আছে; ইহাদের লব্ধি নিরূপণ কর।

আমরা 10 ফু. সে. বেগের দিকে এবং উহার লম্বদিকে দুইটি সরলরেখা XOX′ এবং YOY′ লইলাম। [চিত্র পরবর্তী পৃষ্ঠায়]

$U = 10 - 20\cos 60^\circ - 30\cos 60^\circ$

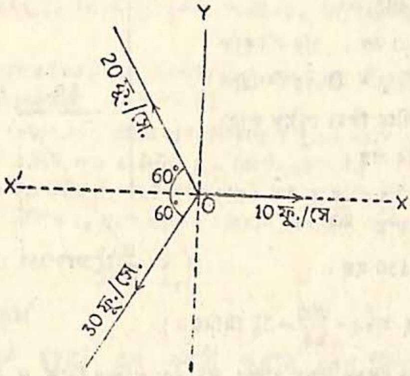
$= 10 - 50\cos 60^\circ = 10 - 25 = -15$ ফু./সে. ; $[\cos 60^\circ = \frac{1}{2}]$

$V = 0 + 20\sin 60^\circ - 30\sin 60^\circ$

$= -10\sin 60^\circ = -10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -5\sqrt{3}$ ফু./সে. ;

এখন, $w^2 = u^2 + v^2 = (-15)^2 + (-5\sqrt{3})^2 = 225 + 75 = 300$

$\therefore \quad w = 10\sqrt{3}$ ফু. সে. ।



u বেগ OX'-এর দিকে, v বেগ OY'-এর দিকে

w যদি OX'-এর সঙ্গে θ কোণ করে, তাহা হইলে

$$\tan\theta = \frac{5\sqrt{3}}{15} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$$

অতএব, লব্ধি বেগ $10\sqrt{3}$ ফু./সে. দ্বিতীয় বেগের লম্বাভিমুখে।

প্রশ্নমালা 3

1. নিম্নের প্রশ্নগুলিতে u এবং v উপাংশ বেগ, α বেগ দুইটির দিকের অন্তর্ভূত কোণ এবং w তাহাদের লব্ধি বেগ।

(i) দেওয়া আছে $u=8$, $v=6$, $\alpha=90°$; w নির্ণয় কর।

(ii) $u=24$, $w=25$ এবং $\alpha=90°$ দেওয়া আছে ; v নির্ণয় কর।

(iii) দেওয়া আছে $u=5$, $v=3$ এবং $\alpha=60°$; w নির্ণয় কর।

(iv) দেওয়া আছে $u=7$, $v=8$, $w=13$; α নির্ণয় কর।

(v) দেওয়া আছে $v=3$, $w=3\sqrt{3}$ এবং $\alpha=60°$; u নির্ণয় কর।

(iv) $u=63$, $w=65$, $\alpha=90°$ হইলে v নির্ণয় কর।

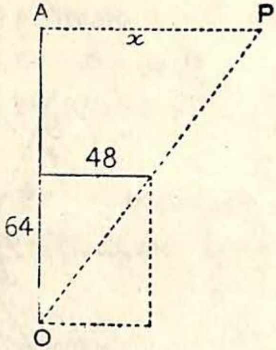
2. সেকেণ্ডে 6 ফুট এবং সেকেণ্ডে 4 ফুট মানের দুইটি বেগের বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি নির্ণয় কর।

3. একজন সাঁতারু স্রোতের লম্বাভিমুখে মিনিটে 64 গজ বেগে সাঁতার কাটিতেছে ; স্রোতের বেগ মিনিটে 48 গজ। সাঁতারুর প্রকৃত লব্ধি বেগ কত ? নদীর প্রস্থ 200 গজ হইলে সাঁতারু অপর পারে বিপরীত বিন্দু হইতে কত গজ নীচে গিয়া পৌঁছিবে। অপর পারে পৌঁছিতে তাহার কত সময় লাগিবে ?

[সংকেত :-- u এবং v উপাংশ বেগ হইলে প্রকৃত বেগ (বা লব্ধি বেগ) w পাইতে হইলে, যেহেতু $\angle=90^\circ$

$$w^2=u^2+v^2;$$

$$\therefore\quad w=\sqrt{(64^2+48^2)}=80$$



প্রকৃত বেগ মিনিটে 80 গজ। যদি সাঁতারু নদীর অপর পারে P-বিন্দুতে O-এর বিপরীত বিন্দু A হইতে x গজ নীচে গিয়া পৌঁছে তাহা হইলে, যেহেতু OA = নদীর প্রস্থ।

$$\therefore\quad \frac{x}{AO}=\frac{48}{64}=\frac{3}{4}\quad\therefore\quad \frac{x}{200}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\quad x=\frac{3}{4}\times 200=150 \text{ গজ।}$$

অপর পারে পৌঁছিতে সময় $=\frac{200}{64}=3\frac{1}{8}$ মিনিট।]

4. যদি একটি কণায় যুগপৎ উত্তর, দক্ষিণ, পূর্ব এবং পশ্চিম দিকে 8, 5, 10 এবং 6 ফু./সে. বেগ থাকে তাহা হইলে লব্ধিবেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

5. পরস্পর লম্বাভিমুখী সেকেণ্ডে 187 সেন্টিমিটার এবং সেকেণ্ডে 84 সেন্টিমিটার বেগ দুইটির লব্ধি নির্ণয় কর।

6. একটি কণার যুগপৎ দুইটি বেগ আছে, একটি পূর্বদিকে সেকেণ্ডে 10 ফুট, অপরটি উত্তর-পশ্চিমদিকে সেকেণ্ডে $10\sqrt{2}$ ফুট। লব্ধিবেগ নির্ণয় কর।

7. নদীর প্রস্থ 300 গজ হইলে স্রোতের লম্বাভিমুখে স্রোতের দ্বিগুণ বেগে সাঁতার কাটিয়া একজন সাঁতারু অপর পারে কত নীচে গিয়ে পৌঁছিবে?

8. দুইটি বেগের লব্ধি প্রথম বেগের লম্বাভিমুখে সেকেণ্ডে 20 ফুট। প্রথম বেগ সেকেণ্ডে 15 ফুট হইলে দ্বিতীয় বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

9. প্রদত্তদিকে এবং তাহার লম্বাভিমুখে নিম্নলিখিত বেগসমূহের উপাংশ নির্ণয় কর :—

(i) বেগ 10 ফু./সে ; প্রদত্ত দিক্ ইহার সহিত 0° কোণ করে।
(ii) বেগ ঘণ্টায় 4 মাইল ; প্রদত্ত দিক্ ইহার সহিত 30° কোণ করে।
(iii) বেগ সেকেণ্ডে 50 সেন্টিমিটার ; প্রদত্ত দিক্ ইহার সহিত 45° কোণ করে।
(iv) বেগ মিনিটে 24 গজ ; প্রদত্ত দিক্ ইহার সহিত 60° কোণ করে।
(v) বেগ ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার ; প্রদত্ত দিক্ ইহার সহিত 90° কোণ করে।
(vi) বেগ সেকেণ্ডে 44 ফুট ; " " " " 120° " "
(vii) বেগ ঘণ্টায় $10\sqrt{2}$ মাইল ; " " " " 135° " "
(viii) বেগ সেকেণ্ডে 22 ফুট ; " " " " 150° " "
(ix) বেগ সেকেণ্ডে 64 সেন্টিমিটার " " " " 180° " "

10. প্রতি সেকেণ্ডে 2 ফুট বেগে একটি নদী প্রবাহিত হইতেছে। নদীটি লম্বাভিমুখে উত্তীর্ণ হইবার জন্য সেকেণ্ডে 3 ফুট বেগে সাঁতার কাটিলে একজন সাঁতারু কোন্ দিকে সাঁতার কাটিবে? যদি নদীটি 100 ফুট চওড়া হয়, কত সময় পরে সাঁতারু অপর পারে পৌঁছিবে? [প. ব. 1954]

11. স্রোত না থাকিলে একজন লোক সাঁতার দিয়া 200 মিটার চওড়া একটি নদী সোজা গিয়া 4 মিনিটে উত্তীর্ণ হইতে পারে, স্রোত থাকিলে তাহার 5 মিনিট সময় লাগে। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

12. একটি যুদ্ধ জাহাজ ঘণ্টায় 15 মাইল বেগে যাইবার কালে 4 মাইল দূরে অবস্থিত একটি দুর্গ লক্ষ্য করিয়া নদীর চওড়া দিক্ বরাবর গোলা ছুঁড়ে। যদি গোলার অনুভূমিক বেগ সেকেণ্ডে 1200 ফুট হয়, তাহা হইলে দুর্গ হইতে গোলার কি পরিমাণ বিচ্যুতি ঘটিবে?

13. একটি বস্তুর যুগপৎ 20, 10 এবং 8 একক তিনটি বেগ থাকিলে ইহা স্থিরাবস্থায় থাকা সম্ভব কি-না?

14. একটি কণার যুগপৎ তিনটি বেগ সেকেণ্ডে 3, 7 এবং 8 ফুট ইহাকে স্থিতাবস্থায় রাখে। বৃহত্তম এবং ক্ষুদ্রতম বেগের অন্তর্বর্তী কোণ নির্ণয় কর। [*C. U. 1937*]

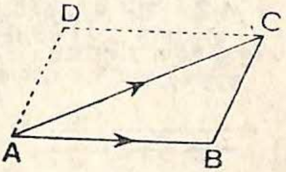
[সংকেত :—এই দুই বেগের লব্ধি তৃতীয় বেগ সেকেণ্ডে 7 ফুটের সমান ও বিপরীতমুখী

$\therefore\ 7^2 = 3^2 + 8^2 + 2.3.8.\cos\alpha$ (α নির্ণেয় কোণ)]

15. একটি স্টীমার একটি নদীর স্রোতের প্রতিকূলে s পথ অতিক্রম করিতে t_1 সময় লাগে এবং স্রোতের অনুকূলে ঐ পথ ফিরিতে t_2 সময় লাগে। প্রমাণ কর যে স্রোতহীন নদীতে স্টীমারের বেগ $\frac{s}{2}\left(\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_1}\right)$ এবং স্রোতের বেগ $\frac{s}{2}\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)$.

বেগের পরিবর্তন

মনে কর, কোন মুহূর্তে AB একটি কণার বেগ নির্দেশ করে এবং কিছু সময় পরে তাহার বেগ AC। BC যুক্ত কর এবং ABCD সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর। এখন বেগের ত্রিভুজ সূত্র (অথবা সামান্তরিক সূত্র) অনুসারে AC বেগ AB এবং BC বেগের লব্ধি। সুতরাং এই সময়ে BC (অথবা AD) AB বেগের পরিবর্তন নির্দেশ করে। অতএব দেখা গেল কোনও সময়ের ব্যবধানে বেগের পরিবর্তন হইল সেই বেগ যাহার ও প্রথম বেগের লব্ধি হয় অন্তিম বেগ।



সাধারণত বেগের পরিবর্তনের দিক্ ও মান পরিবর্তিত হয়। যখন কোনও কণা এক সরল রেখায় ভ্রমণ করে তখন বেগের পরিবর্তন ঐ সরলরেখা বরাবর হয়।

যেমন একটা কণার একই সময়ে দুই বা ততোধিক বেগ থাকিতে পারে, সেইরকম একটি কণার একই সময়ে দুই বা ততোধিক ত্বরণ থাকিতে পারে। যেহেতু ত্বরণ একটি ভেক্টর বা বাহিত রাশি সেইজন্য দুই বা ততোধিক ভেক্টরের লব্ধি নির্ণয় প্রণালী দুই বা ততোধিক ত্বরণের লব্ধি নির্ণয়েও প্রযোজ্য। আমরা বিশেষভাবে সামান্তরিক সূত্রের উল্লেখ করিব।

ত্বরণের সামান্তরিক সূত্র

যদি কোন কণার যুগপৎ দুইটি ত্বরণ থাকে এবং ঐ দুই ত্বরণের মান এবং দিক্ একটি সামান্তরিকের দুই সন্নিহিত বাহুর দ্বারা প্রদর্শিত হয়, তাহা হইলে ঐ দুই বাহুর ছেদ-বিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত কর্ণ লব্ধি ত্বরণের মান এবং দিক্ প্রদর্শন করে।

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

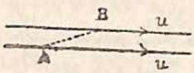
আপেক্ষিক বেগ
Relative Velocity

4-1. একটি বস্তু অপর একটি বস্তুর সাপেক্ষে (অর্থাৎ এই বস্তুটি স্থির আছে মনে করিলে) যে হারে অবস্থান পরিবর্তন করে তাহাকে বস্তুটির আপেক্ষিক বেগ বলা হয়।

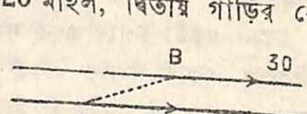
পৃথিবীর একটা বেগ আছে। রেলগাড়ীর বেগ ঘণ্টায় 40 কিলোমিটার বলিলে আমরা বুঝি যে পৃথিবী স্থির আছে মনে করিলে পৃথিবী-পৃষ্ঠে রেলগাড়ী ঘণ্টায় 40 কিলোমিটার বেগে চলিতেছে।

সংজ্ঞা : যদি দুইটি বস্তু A এবং B উভয়েরই অবস্থান পরিবর্তন হয় তাহা হইলে একের অবস্থান হইতে অপরের অবস্থান পরিবর্তনের হারকে দ্বিতীয়ের আপেক্ষিক বেগ বলে।

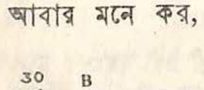
4-2. মনে কর, দুইটি রেলগাড়ী পাশাপাশি সমান্তরাল রেলপথে সমান বেগ u লইয়া চলিতেছে। A এবং B দুই গাড়ীতে দুইটি বিন্দু। একজন লোক A-তে বসিয়া B-র উপর দৃষ্টি নিবদ্ধ রাখিলে দেখিতে পাইবে A হইতে B-র দূরত্ব কিংবা দিক্ কিছুরই পরিবর্তন হইতেছে না। অর্থাৎ A-র সাপেক্ষে B স্থির আছে। এই রকম B-ও দেখিবে তাহার সাপেক্ষে A স্থির আছে।



এখন মনে কর, প্রথম গাড়ির বেগ ঘণ্টায় 20 মাইল, দ্বিতীয় গাড়ির বেগ ঘণ্টায় 30 মাইল এবং ইহারা একই দিকে যাইতেছে, A-এর নিকট হইতে B-র সরণ ঘণ্টায় 10 মাইল অর্থাৎ B-র আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায় 10 মাইল।



আবার মনে কর, দ্বিতীয় গাড়ি ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে প্রথম গাড়ির বিপরীত দিকে যাইতেছে। তখন A-র নিকট হইতে B-র সরণ এক ঘণ্টায় 50 মাইল অর্থাৎ B-র আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায় 50 মাইল (A-র গতির বিপরীত দিকে B-র আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায় 50 মাইল)।



[A-র গতির দিকে ধনাত্মক বেগ হইলে বিপরীত দিকে বেগ ঋণাত্মক ।]

B-র আপেক্ষিক বেগ

প্রথম ক্ষেত্রে ঘণ্টায় $u-u=0$;

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ঘণ্টায় $(30-20)=10$ মাইল ;

তৃতীয় ক্ষেত্রে ঘণ্টায় $(-30-20)=-50$ মাইল ।

দেখ, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই B-র আপেক্ষিক বেগ পাওয়া যাইতেছে B-র নিজ বেগ বা প্রকৃত বেগের সহিত A-র বিপরীত বেগ যোগ করিয়া ।

4-3. ব্যাপকভাবে, যদি A-র বেগ ঘণ্টায় u হয় এবং B-র বেগ ঘণ্টায় v হয় তাহা হইলে একই রেখায় কিংবা সমান্তরাল রেখায় চলিলে

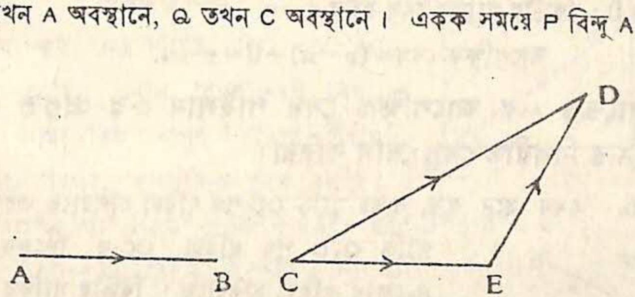
এক ঘণ্টায় A যায় u এবং B যায় v

$\therefore$ এক ঘণ্টায় A হইতে B র সরণ $v-u$ অর্থাৎ B-র আপেক্ষিক বেগ $=v-u$.

4-4. আপেক্ষিক বেগের চিত্র (রেখা দ্বারা প্রদর্শন) :

এখন আরও ব্যাপকভাবে আপেক্ষিক বেগ আলোচনা করা হইতেছে :

মনে কর, P এবং Q দুইটি বিন্দু u এবং v বেগ লইয়া দুই দিকে চলিতেছে ; এবং P যখন A অবস্থানে, Q তখন C অবস্থানে । একক সময়ে P বিন্দু A হইতে



B-তে গেল এবং Q ঐ সময়ে C হইতে D-তে গেল অর্থাৎ AB প্রথম বিন্দুর বেগ এবং CD দ্বিতীয় বিন্দুর বেগ বুঝায় । এখন CE রেখা AB-র সমান ও সমান্তরাল করিয়া আঁক । তাহা হইলে CE রেখাও P বিন্দুর বেগ বুঝাইবে । ED যোগ কর ।

একক সময়ে Q-র সরণ CD এবং P-র সরণ CE-র সমান । অতএব একক সময়ে P-র সাপেক্ষে Q-র সরণ ED অর্থাৎ ED রেখা আপেক্ষিক বেগের মান ও দিক্ প্রদর্শন করে ।

লক্ষ্য কর :—ECD ত্রিভুজে ED-র দ্বারা প্রদর্শিত বেগ, EC এবং CD-র দ্বারা প্রদর্শিত বেগের লব্ধি অর্থাৎ

P-র সাপেক্ষে Q-র আপেক্ষিক বেগ = P-র বেগের সমান কিন্তু বিপরীতমুখী বেগ এবং Q-র প্রকৃত বেগের লব্ধি।

[ভেক্টর গণিতে ইহাকে প্রকাশ করা হয়

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CE}$$

অর্থাৎ Q-র আপেক্ষিক বেগ = Q-র প্রকৃত বেগ − P-র বেগ

= Q-র প্রকৃত বেগ এবং P-র বিপরীত বেগের লব্ধি।]

4-5. পূর্বের 4-3 অনুচ্ছেদের আলোচনায় উভয় গাড়ির বেগ যদি একই পরিমাণ (ধর, ঘণ্টায় x মাইল) বাড়ানো হয় তাহা হইলে A-র বেগ $u+x$ এবং B-র বেগ $v+x$. এখন এক ঘণ্টায় A যায় $u+x$ এবং B যায় $v+x$. সুতরাং এক ঘণ্টায় A হইতে B-র সরণ হয় $(v+x)-(u+x)=v-u$.

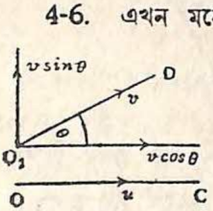
দেখা গেল, **উভয়ের বেগের সহিত একই বেগ যোগ করিলে আপেক্ষিক বেগের কোন পরিবর্তন হয় না।**

এইবার উভয়ের বেগের সহিত $-u$ যোগ করি। প্রথম গাড়ির বেগ হইল $u-u=0$; দ্বিতীয় গাড়ির বেগ হইল $v-u$.

$$\text{আপেক্ষিক বেগ} = (v-u)+0 = v-u.$$

ইহাতেও A-র আপেক্ষিক বেগ পাইলাম B-র প্রকৃত বেগের সহিত A-র বিপরীত বেগ যোগ করিয়া।

4-6. এখন মনে কর, প্রথম গাড়ি OC পথ ধরিয়া চলিয়াছে এবং দ্বিতীয় গাড়ি O_1D পথ ধরিয়া OC-র দিকের সহিত θ-কোণ করিয়া চলিয়াছে। দ্বিতীয় গাড়ির গতিকে OC-র দিকে এবং উহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিলে $v\cos\theta$ এবং $v\sin\theta$ উপাংশদ্বয় পাওয়া যায়। এখন



$$\text{OC-র দিকে আপেক্ষিক বেগ} = v\cos\theta - u \qquad ...(1)$$

$$\text{OC-র লম্বাভিমুখে আপেক্ষিক বেগ} = v\sin\theta - 0 \text{ বা } v\sin\theta \qquad ...(2)$$

কিন্তু $v\cos\theta$ এবং $v\sin\theta$ একত্রে v-এর সমান। অতএব v এবং $-u$-এর লব্ধি নির্ণয় করিয়া আপেক্ষিক বেগ পাওয়া যায় অর্থাৎ **দ্বিতীয় গাড়ীর আপেক্ষিক বেগ = তাহার নিজের বেগ এবং প্রথম গাড়ির বিপরীত বেগের লব্ধি।**

(A-র সাপেক্ষে) B-র **আপেক্ষিক বেগ**

=B-র নিজ বেগ এবং A-র বেগের সমান কিন্তু বিপরীতমুখী বেগের লব্ধি।

আবার

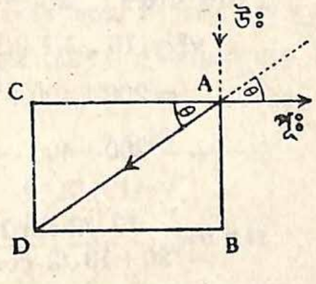
B-র প্রকৃত বেগ=A-র সাপেক্ষে B-র বেগ এবং A-র বেগের লব্ধি।

[যথা, সাঁতারুর প্রকৃত বেগ=স্রোতের সাপেক্ষে সাঁতারুর বেগ ও স্রোতের বেগের লব্ধি।]

4-7. **উদাহরণ : 1.** একজন লোক ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে মোটর-গাড়ি চালাইয়া পূর্বদিকে যাইতেছে। উত্তরদিক হইতে সেকেণ্ডে 33 ফুট অনুভূমিক বেগে একটি ঢিল গাড়িতে গিয়া পড়িল। গাড়ির আরোহীর নিকট ঢিলটি কোন্ দিক্ হইতে কত বেগে পড়িয়াছে মনে হইবে ?

গাড়ির বেগ$=\dfrac{30\times 1760\times 3}{60\times 60}$ ফু./সে.

$=44$ ফু./সে.



মনে কর, AB ঢিলের বেগ এবং AC গাড়ির বেগের সমান বিপরীতমুখী বেগ। ABDC সামান্তরিক সম্পূর্ণ করিলে উহার কর্ণ AD ঢিলের আপেক্ষিক বেগ বুঝায়।

এখন, $AD^2=AB^2+AC^2=33^2+44^2=11^2(3^2+4^2)$.

$\therefore \quad AD=11\sqrt{3^2+4^2}=11\times 5=55$

আপেক্ষিক বেগের দিক্ গাড়ির গতির বিপরীত দিকের সঙ্গে θ-কোণ করিলে

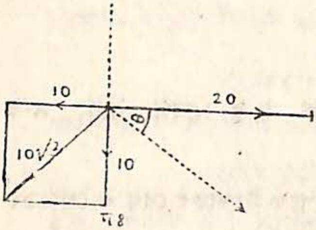
$$\tan\theta=\frac{CD}{AC}=\frac{33}{44}=\frac{3}{4}$$

$\therefore$ ঢিলের আপেক্ষিক বেগ সেকেণ্ডে 55 ফুট ; ইহা গাড়ির গতির দিকের সঙ্গে $180°+\theta$ কোণে আছে অর্থাৎ, পশ্চিম হইতে দক্ষিণদিকে θ কোণ করে এবং $\tan\theta=\frac{3}{4}$.

2. একটি স্টীমার পূর্বদিকে 20 মাইল বেগে যাইতেছে এবং মনে হইতেছে বায়ু উত্তর-পূর্ব দিক্ হইতে ঘণ্টায় $10\sqrt{2}$ মাইল বেগে বহিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

∴ বায়ুর প্রকৃত বেগ = বায়ুর আপেক্ষিক বেগ এবং স্টীমারের বেগের লব্ধি।

এখন বায়ুর আপেক্ষিক বেগ দক্ষিণ-পশ্চিম দিকে ঘণ্টায় $10\sqrt{2}$ মাইলকে



দক্ষিণ ও পশ্চিম দিকে বিশ্লেষণ করিলে তাহার উপাংশ দক্ষিণ দিকে ঘণ্টায় 10 মাইল [$\because 10\sqrt{2}\cos 45° = 10$] এবং পশ্চিম দিকে ঘণ্টায় 10 মাইল।

∴ লব্ধি পূর্বদিকে $(20-10)$ অর্থাৎ 10 এবং দক্ষিণদিকে 10, এই দুই-এর লব্ধির সমান

∴ নির্ণেয় লব্ধি $= \sqrt{10^2+10^2} = 10\sqrt{2}$.

লব্ধির দিক দক্ষিণ-পূর্ব [$\because \tan\theta = \frac{10}{10} = 1 = \tan 45°$]

∴ বায়ু ঘণ্টায় $10\sqrt{2}$ মাইল বেগে দক্ষিণ-পূর্বদিকে বহিতেছে।

[**প্রকারান্তর :** মনে কর, প্রকৃত বেগ V.

$$V^2 = (10\sqrt{2})^2 + 20^2 + 2(10\sqrt{2}).20.\cos 135°$$
$$= 200 + 400 + 2(10\sqrt{2}) \times 20\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= 200 + 400 - 400 = 200.$$

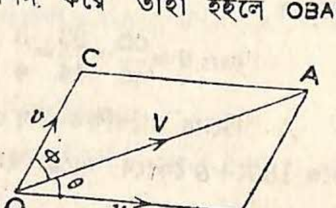
∴ $V = 10\sqrt{2}$.

$$\tan\theta = \frac{10\sqrt{2}\sin 135°}{20+10\sqrt{2}\cos 135°} = \frac{10}{20-10} = \frac{10}{10} = 1 = \tan 45°.$$]

4-8. একটি বেগ ও তাহার দুই উপাংশের মধ্যে সম্বন্ধ

মনে কর, V বেগের দুই উপাংশ u এবং v যথাক্রমে Vএর সঙ্গে θ এবং ϕ কোণ করিয়াছে।

যদি OA সরলরেখা V বেগ প্রদর্শন করে তাহা হইলে OBAC সামান্তরিক অঙ্কন করিলে OB এবং OC সরলরেখাদ্বয় u এবং v প্রদর্শন করে। আবার BA সরলরেখা OC-এর সমান ও সমান্তরাল বলিয়া BA সরলরেখাও v উপাংশ নির্দেশ করে।



ত্রিভুজ OBA হইতে

$$\frac{OB}{\sin BAO} = \frac{BA}{\sin AOB} = \frac{OA}{\sin OBA}$$

এখন, $\sin BAO = \sin\phi$, $\sin AOB = \sin\theta$

$$\sin OBA = \sin\{180^\circ - (\theta+\phi)\} = \sin(\theta+\phi)$$

$$\therefore \quad \frac{u}{\sin\phi} = \frac{v}{\sin\theta} = \frac{V}{\sin(\theta+\phi)}$$

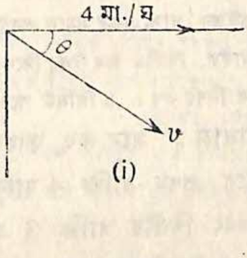
$$\therefore \quad u = \frac{V\sin\phi}{\sin(\theta+\phi)}, \quad v = \frac{V\sin\theta}{\sin(\theta+\phi)}$$

ইহারা অতি প্রয়োজনীয় সম্বন্ধ।

উদাহরণ ঃ একজন লোক ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে পূর্বদিকে যাইতেছে ; তাহার মনে হয় বায়ু সোজা উত্তর দিক্ হইতে বহিতেছে। যখন সে তাহার বেগ দ্বিগুণ করে তখন তাহার মনে হয় বায়ু উত্তর-পূর্বদিক্ হইতে বহিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগ ও অভিমুখ নির্ণয় কর।

বায়ুর প্রকৃত বেগ তাহার আপেক্ষিক বেগ ও লোকের বেগের লব্ধি

(1) প্রথম ক্ষেত্রে বায়ুর আপেক্ষিক বেগ দক্ষিণ দিকে, লোকটির বেগ পূর্বদিকে ঘণ্টায় 4 মাইল। মনে কর, বায়ুর প্রকৃত বেগ v পূর্বদিকের সঙ্গে θ কোণ করে ; তাহা হইলে



(i)

$v\cos\theta = 4 \cdots\cdots (1)$

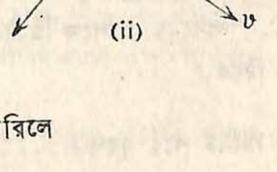
(2) দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বায়ুর আপেক্ষিক বেগ দক্ষিণ-পশ্চিম দিকে।

এখন $\dfrac{8}{\sin(135^\circ - \theta)} = \dfrac{v}{\sin 135^\circ}$

$v\sin(135^\circ - \theta) = 8\sin 135^\circ$

$$v\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$= 8 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$



(ii)

$\therefore \quad v\cos\theta + v\sin\theta = 8$

(1) সমীকরণের সাহায্যে

$4 + v\sin\theta = 8$

$\therefore \quad v\sin\theta = 4 \cdots (2).$

(1) ও (2) হইতে বর্গ করিয়া যোগ করিলে

$v^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 32$

$v^2 = 32 \quad \therefore \quad v = 4\sqrt{2}$ মাইল/ঘণ্টা

(2) কে (1) দিয়া ভাগ করিয়া

$$\tan\theta = 1 \quad \therefore \quad \theta = 45°.$$

$\therefore$ বায়ুর প্রকৃত বেগ ঘণ্টায় $4\sqrt{2}$ মাইল এবং ইহা দক্ষিণ পূর্বদিকে বহিতেছে।

প্রশ্নমালা 6

1. একটি রেল গাড়ীর বেগ ঘণ্টায় 30 মাইল, আর একটি গাড়ীর বেগ সেকেণ্ডে 60 ফুট :

(i) উভয় গাড়ী একই দিকে চলিলে আপেক্ষিক বেগ কত ?

(ii) বিপরীত দিকে চলিলে আপেক্ষিক বেগ কত ?

2. একজন লোক ঘণ্টায় $3\frac{3}{4}$ মাইল বেগে নৌকা বাহিয়া যায়। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় $1\frac{1}{4}$ মাইল হইলে,

(i) স্রোতের দিকে 15 মাইল পথ যাইতে কত সময় লাগিবে ?

(ii) স্রোতের বিপরীত দিকে 15 মাইল যাইতে কত সময় লাগিবে ?

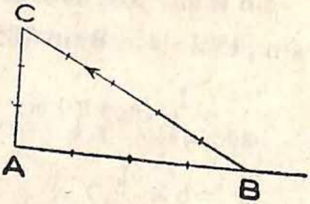
3. 200 গজ এবং 240 গজ দীর্ঘ দুইখানা রেলগাড়ি সমান্তরাল পথে চলিতেছে। প্রথম গাড়ির বেগ ঘণ্টায় 45 মাইল এবং দ্বিতীয় গাড়ির বেগ ঘণ্টায় 30 মাইল।

(i) একই দিকে চলিলে মিলিত হইবার কত সময় পরে একে অন্যকে অতিক্রম করিবে ?

(ii) বিপরীতমুখে চলিলে সাক্ষাতের কত সময় পরে একে অন্যকে অতিক্রম করিবে ?

4. দুইজন লোক একই সময়ে একই স্থান হইতে হাঁটিতে আরম্ভ করে। একজন পূর্বদিকে ঘণ্টায় 4 মাইল, দ্বিতীয় জন উত্তর দিকে ঘণ্টায় 3 মাইল হাঁটিলে দ্বিতীয় ব্যক্তির আপেক্ষিক বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর। 3 মিনিট পরে একে অন্যের নিকট হইতে কত দূরে থাকিবে ?

সমাধান : মনে কর, তাহারা A হইতে যাত্রা করে। তাহা হইলে এক ঘণ্টা পরে প্রথম ব্যক্তি 4 মাইল পূর্বদিকে B-তে এবং দ্বিতীয় ব্যক্তি 3 মাইল উত্তর দিকে C-তে উপস্থিত হইবে। অতএব 1 ঘণ্টা পরে এক হইতে অপরের সরণ BCর দ্বারা আপেক্ষিক বেগ নিরূপিত হইবে।



এখন $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 3^2 = 5^2 \quad \therefore \quad BC = 5.$

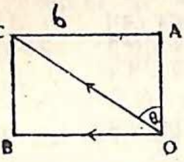
$$\tan ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ প্রথমের সাপেক্ষে দ্বিতীয়ের আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায় 5 মাইল এবং BC-র দিকে।

3 মিনিট পরে দূরত্ব $= \frac{5 \times 1760 \times 3}{60} = 440$ গজ।

প্রকারান্তর : মনে কর, OA দ্বিতীয় ব্যক্তির বেগ এবং OB প্রথমের বিপরীত বেগ ; তাহা হইলে সামান্তরিক OACB সম্পূর্ণ করিয়া OC কর্ণ দ্বিতীয় ব্যক্তির আপেক্ষিক বেগ বুঝায়।

$$OC^2 = OA^2 + OB^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 \quad \therefore \quad OC = 5.$$



আপেক্ষিক বেগ তাহার নিজের দিকের সঙ্গে অর্থাৎ উত্তরের সঙ্গে θ-কোণ করিলে $\tan\theta = \frac{4}{3}$.

আপেক্ষিক বেগ ঘণ্টায় 5 মাইল এবং উত্তরের সঙ্গে θ-কোণ পশ্চিমে।

5. একটি কণা উত্তর দিকে সেকেণ্ডে 5 ফুট বেগে এবং আর একটি কণা পূর্বদিকে সেকেণ্ডে 12 ফুট বেগে চলিতেছে। যদি তাহারা একই সময়ে একই স্থান হইতে যাত্রা করে তাহা হইলে একটির সাপেক্ষে অন্যের আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় কর। যাত্রার এক মিনিট পরে তাহাদের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

6. একটি স্টীমার ঘণ্টায় 12 মাইল বেগে পূর্বদিকে এবং আর একটি স্টীমার ঘণ্টায় 16 মাইল বেগে উত্তর দিকে যাইতেছে। দ্বিতীয় স্টীমারের আপেক্ষিক বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

7. একটি স্টীমার ঘণ্টায় $12\sqrt{2}$ মাইল বেগে দক্ষিণ দিকে এবং আর একটি স্টীমার ঘণ্টায় 12 মাইল বেগে দক্ষিণ-পূর্বদিকে যাইতেছে। প্রথম স্টীমারের আরোহীর সাপেক্ষে দ্বিতীয় স্টীমারের বেগ নির্ণয় কর।

8. সেকেণ্ডে 66 ফুট বেগে উল্লম্বভাবে বৃষ্টি পড়িতেছে। রেল গাড়ির যাত্রীর নিকট মনে হইতেছে বৃষ্টি 45° কোণে হেলিয়া পড়িতেছে। রেলগাড়ী ঘণ্টায় কত মাইল বেগে যাইতেছে ? [উ বি. 1948]

9. একজন লোক ঘণ্টায় 2 মাইল বেগে পূর্বদিকে যাইতেছিল তখন তাহার মনে হইতেছিল বায়ু উত্তর দিক হইতে বহিতেছিল। ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে গিয়া মনে হইল বায়ু উত্তর-পূর্ব দিক হইতে বহিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

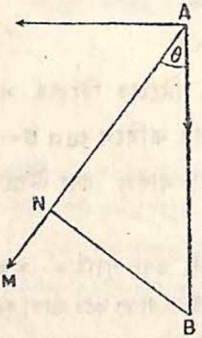
10. একটি স্টীমার ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে উত্তর-পূর্ব দিকে যাইতেছে। স্টীমারের আরোহীর নিকট মনে হইতেছে বায়ু ঘণ্টায় $10\sqrt{2}$ মাইল বেগে উত্তর দিক হইতে বহিতেছে। বায়ুর প্রকৃত বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

11. একজন লোক ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে হাঁটিতেছে। তাহার মনে হয় বৃষ্টি উল্লম্বভাবে ঘণ্টায় $3\sqrt{3}$ মাইল বেগে পড়িতেছে। বৃষ্টির প্রকৃত দিক্ নির্ণয় কর। [উ. প্র. 1953]

12. মধ্যাহ্ন সময় একটি জাহাজ A আর একটি জাহাজ B হইতে 20 মাইল উত্তরে ছিল। A ঘণ্টায় 12 মাইল বেগে সোজা দক্ষিণে এবং B ঘণ্টায় 9 মাইল বেগে সোজা পূর্বদিকে যাইতেছিল। কত সময় পরে তাহারা পরস্পরের নিকটতম হইয়াছিল এবং তখন তাহাদের মধ্যে দূরত্ব কত ছিল ?

[মনে কর, মধ্যাহ্ন সময়ে A এবং B জাহাজ দুইটির অবস্থান, তাহা হইলে AB = 20 মাইল।

A-র আপেক্ষিক বেগ তাহার নিজ বেগ দক্ষিণ দিকে ঘণ্টায় 12 মাইল এবং B-র বিপরীত বেগ অর্থাৎ পশ্চিম দিকে ঘণ্টায় 9 মাইলের লব্ধি।



B-র সাপেক্ষে A-র বেগ যেন AB-র সঙ্গে θ-কোণ করে,

তাহা হইলে A-র আপেক্ষিক বেগ

$$=\sqrt{12^2+9^2}=15 \text{ মাইল/ঘণ্টা}$$

$\tan\theta=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$; এবং ইহা হইতে

$$\sin\theta=\frac{3}{4};\ \cos\theta=\frac{4}{5}$$

B হইতে মনে হইবে A স্টীমার AM দিকে চলিতেছে। BN লম্ব অঙ্কিত করিলে BN ন্যূনতম দূরত্ব।

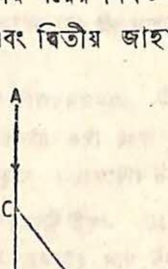
এবং $BN=AB\sin\theta=20\times\frac{3}{5}=12$ মাইল।

আবার, $AN=AB\cos\theta=20\times\frac{4}{5}=16$ মাইল।

স্টীমার যদি t সময় পরে ন্যূনতম দূরত্বে আসে তাহা হইলে

$$t=\tfrac{16}{15} \text{ ঘণ্টা}=1 \text{ ঘণ্টা } 4 \text{ মিনিট।}$$

প্রকারান্তরঃ মনে কর, t সময় পরে স্টীমার দুইটি পরস্পরের নিকটতম হয়। যদি t সময়ে প্রথম জাহাজ A হইতে C-তে আসে, এবং দ্বিতীয় জাহাজ B হইতে D-তে যায়, তাহা হইলে তখন তাহাদের দূরত্ব CD এবং



$$CD^2=BC^2+BD^2$$
$$=(20-12t)^2+(9t)^2$$
$$=400-480t+225t^2$$
$$=225\left(t^2-\frac{480}{225}t+\frac{400}{225}\right)$$
$$=225\left(t^2-\frac{32}{15}t+\frac{16}{9}\right)$$
$$=225\left\{\left(t-\frac{16}{15}\right)^2+\frac{16}{9}-\frac{256}{225}\right\}=225\left\{\left(t-\frac{16}{15}\right)^2+\frac{16}{25}\right\}$$

যখন $t-\frac{16}{15}=0$ তখন CD^2 লঘিষ্ঠ।

[$\because \left(t-\frac{16}{15}\right)^2$ ঋণ-সংখ্যা হইতে পারে না।]

$\therefore$ CD^2-এর লঘিষ্ঠ মান$=225\times\frac{16}{25}=144$

$\therefore$ $CD=12$ মাইল

এবং তখন $t=\frac{16}{15}$ ঘণ্টা$=1$ ঘণ্টা 4 মিনিট।

অতএব মধ্যাহ্ন সময়ের 1 ঘণ্টা 4 মিনিট পরে স্টীমার দুইটি পরস্পরের নিকটতম হইয়াছিল এবং তাহাদের নিকটতম দূরত্ব ছিল 12 মাইল।]

13. একটি জাহাজ ঘণ্টায় 1 মাইল বেগে উত্তর দিকে যাইবার কালে তাহার সোজা পূর্ব দিকে 10 মাইল দূরে একটি জাহাজ দেখিতে পায়; ইহা পশ্চিম দিকে ঘণ্টায় 16 মাইল বেগে যাইতেছিল। কত সময় পরে তাহারা পরস্পরের নিকটতম হয় এবং তখন তাহাদের মধ্যে দূরত্ব কত? [পাটনা. বি. 1943]

14. একজন লোক সোজা পশ্চিম দিকে যাইবার কালে তাহার মনে হইল বায়ু উত্তর-পশ্চিম দিক্ হইতে প্রবাহিত হইতেছে। কিন্তু যখন সে সোজা পূর্বদিকে একই বেগে হাঁটে বায়ু উত্তর-পূর্ব দিক হইতে প্রবাহিত হইতেছে মনে হয়। বায়ু প্রবাহের এবং লোকটির গতির তুলনা কর।

15. দুইটি কণা v এবং $2v$ বেগে বিপরীত দিকে একটি বৃত্তের পরিধিতে ভ্রমণ করিতেছে। কোন্ অবস্থানে তাহাদের আপেক্ষিক বেগ বৃহত্তম এবং কোন্ অবস্থানে তাহা ক্ষুদ্রতম, তখন ইহাদের মান কত?

16. একটি ক্রুইজার ঘণ্টায় 20 মাইল বেগে সোজা পূর্বদিকে যাইতেছে এবং ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে যাইতেছে এরকম একটি ডেস্ট্রয়ার তখন সোজা দক্ষিণে 10 মাইল দূরে আছে। ডেস্ট্রয়ার জাহাজটি কোন্ দিকে চলিলে ক্রুইজারের সহিত মিলিত হইবে এবং কখন তাহারা মিলিত হইবে?

পঞ্চম পরিচ্ছেদ

সমত্বরণে গতি
Uniformly Accelerated Motion

[শব্দ-পরিচিতি : সমত্বরণে গতি]

5-1. সরল পথে সমত্বরণ-বিশিষ্ট গতি :

একটি বিন্দু u বেগে যাত্রা করিয়া গতির দিকে f সমত্বরণে একটি সরলরেখায় ভ্রমণ করে, যদি t সময় পরে তাহার বেগ v এবং সরণ s হয়, তাহা হইলে

(1) $\boldsymbol{v = u + ft}$.

(2) $\boldsymbol{s = ut + \frac{1}{2}ft^2}$.

(3) $\boldsymbol{v^2 = u^2 + 2fs}$.

[প্রারম্ভিক বেগ—u, সমত্বরণ—f, সময়—t, অন্তিম বেগ—v এবং সরণ—s]

(1) সমত্বরণ অর্থাৎ একক সময়ে বেগের পরিবর্তন $= f$

$\therefore$ t সময়ে বেগের পরিবর্তন $= ft$

কিন্তু প্রারম্ভিক বেগ $= u$

$\therefore$ t সময় পরে বেগ $=$ প্রারম্ভিক বেগ $+$ এই সময়ে বেগের পরিবর্তন অর্থাৎ $v = u + ft$

(2) মনে কর, মধ্য সময়ে অর্থাৎ $\frac{t}{2}$ সময় পরে বেগ V

তাহা হইলে সূত্র (1) সাহায্যে $V = u + f.\frac{t}{2}$

যেহেতু বেগ সমভাবে পরিবর্তিত হইতেছে সুতরাং মধ্য-মুহূর্তের যে-কোন সময় T পরে বেগ যত বেশি, উহার T-সময় পূর্বে বেগ তত কম। আবার, সমগ্র সময়কে এইরকম যুগ্ম-মুহূর্তসমূহে বিভক্ত করা যায় বলিয়া বিন্দুটির সরণ, সমবেগে V লইয়া t সময়ের সরণের সমান।

$$\therefore \quad s = Vt = \left(u + f.\frac{t}{2}\right).t = ut + \frac{1}{2}ft^2$$

(3) তৃতীয় সম্বন্ধটি প্রথম ও দ্বিতীয় সম্বন্ধ হইতে পাওয়া যায়—

আমরা জানি, $v=u+ft$

$$\therefore \quad v^2=(u+ft)^2=u^2+2uft+f^2t^2$$
$$=u^2+2f(ut+\tfrac{1}{2}ft^2)$$
$$=u^2+2fs. \quad [\because \; ut+\tfrac{1}{2}ft^2=s]$$

5-1A. সমত্বরণে গতি হইলে

সরণ $=\frac{1}{2}$ (প্রারম্ভিক বেগ + অন্তিম বেগ) $\times$ সময়

$$\text{সরণ}=s=ut+\tfrac{1}{2}ft^2$$
$$=(u+\tfrac{1}{2}ft)t$$
$$=\frac{u+u+ft}{2}\times t$$
$$=\tfrac{1}{2}(u+v)t \qquad [\because \; v=u+ft]$$

5-2. বিশেষ কোনও একটি সেকেণ্ডের সরণ :

t-তম সেকেণ্ডে সরণ $=t$ সেকেণ্ডে সরণ $-(t-1)$ সেকেণ্ডে সরণ

$$=[ut+\tfrac{1}{2}ft^2]-[u(t-1)+\tfrac{1}{2}f(t-1)^2]$$
$$=u+\tfrac{1}{2}f(2t-1)$$

5-3. (i) স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিলে $u=0$, তখন 5-1 অনুচ্ছেদের সূত্রত্রয় নিম্নলিখিত সহজরূপে প্রকাশ পায়—

$$(1') \quad v=ft$$
$$(2') \quad s=\tfrac{1}{2}ft^2$$
$$(3') \quad v^2=2fs$$

(ii) f যদি সমমন্দন হয়, তাহা হইলে ত্বরণ $=-f$, তখন সূত্রত্রয় নিম্নলিখিতরূপে পাওয়া যায়—

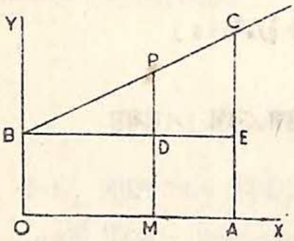
$$(1'') \quad v=u-ft$$
$$(2'') \quad s=ut-\tfrac{1}{2}ft^2$$
$$(3'') \quad v^2=u^2-2fs$$

5-4. সমত্বরণে গতি (Motion with uniform acceleration)

(লৈখিক পদ্ধতি)

2-10. অনুচ্ছেদে সময়-বেগ লেখ হইতে আমরা দেখিয়াছি, ঐ লেখ-র নীচে দুই কোটির মধ্যবর্তী ক্ষেত্র সরণ প্রদর্শন করে। আমরা দেখাইব যে, সমত্বরণ হইলে সময়বেগ লেখ একটি সরলরেখা এবং উক্ত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় সহজ।

মনে কর, u প্রারম্ভিক বেগ এবং f সমত্বরণ ; t সময় এবং s সরণ। Y-অক্ষ বরাবর OB দ্বারা প্রারম্ভিক বেগ u প্রদর্শন করা হইল, ইহা 0 (শূন্য) সময়ের বেগ। OA-র দ্বারা t সময় এবং AC-র দ্বারা সেই সময়ের বেগ প্রদর্শন করা হইল। OM যে-কোন সময় t' এবং MP সেই সময়ে বেগ।



BDE সরলরেখা OX-এর সমান্তরাল করিয়া আঁক ; ইহা যেন MP-কে D বিন্দুতে এবং AC-কে E বিন্দুতে ছেদ করিল।

DP = t' সময়ে বেগের বৃদ্ধি $ft' = f.\text{OM} = f.\text{BD}$

$$\therefore \quad \frac{\text{DP}}{\text{BD}} = f \cdots (1)$$

আবার EC = t সময়ে বেগের বৃদ্ধি $= ft = f.\text{OA} = f.\text{BE}$

$$\therefore \quad \frac{\text{EC}}{\text{BE}} = f \quad \cdots (2)$$

(1) ও (2) হইতে $\frac{\text{DP}}{\text{BD}} = \frac{\text{EC}}{\text{BE}}$

$\therefore$ B, P এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত।

সুতরাং **সময় বেগ লেখ একটি সরলরেখা**।

[OM_1, OM_2, OM_3, ·· যথাক্রমে 1, 2, 3,···সেকেণ্ড সময় এবং উক্ত সময়ে M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3···বেগ হইলে P_1, P_2, P_3···বিন্দুগুলি এক সরলরেখায় আছে দেখা যাইবে। চিত্রে দেখান হয় নাই।]

আবার OA-র দ্বারা প্রদর্শিত t সময়ের সরণের পরিমাপ হয় OACB ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল দ্বারা।

$$\begin{aligned} \therefore \quad \text{সরণ} &= \text{OACB ক্ষেত্র} = \text{OAEB} + \text{ক্ষেত্র BEC} \\ &= \text{OA.OB} + \tfrac{1}{2}\text{BE.EC} \\ &= \text{OA.OB} + \tfrac{1}{2}\text{OA.EC} \\ &= \text{OA.}(\text{OB} + \tfrac{1}{2}\text{EC}) = t(u + \tfrac{1}{2}ft) \end{aligned}$$

অর্থাৎ $s = ut + \frac{1}{2}ft^2$

5-5. সমত্বরণে গতি :

উদাহরণ : (1) একটি রেলগাড়ী 220 গজ পথ অতিক্রম করার পর দেখা

গেল ইহার বেগ ঘণ্টায় 15 মাইল হইতে ঘণ্টায় 60 মাইল হইয়াছে। রেল-গাড়ীর ত্বরণ নির্ণয় কর।

উ।
$$u=\frac{15\times1760\times3}{60\times60}=22 \text{ ফু./সে.}$$
$$v=\text{ঘণ্টায় } 60 \text{ মাইল}=88 \text{ ফু./সে.}$$
$$s=220 \text{ গজ}=220\times3 \text{ ফুট}$$
$$=660 \text{ ফুট।}$$
$v^2=u^2+2fs$ হইতে
$$88^2=22^2+2f.660\;;\;\therefore\; f=\frac{88^2-22^2}{2\times660}$$
$$=\frac{(88+22)(88-22)}{2\times660}$$
$$=\frac{110\times66}{2\times660}=\frac{11}{2}=5\tfrac{1}{2} \text{ ফু./সে}^2.$$

লক্ষ্য কর : দৈর্ঘ্য এবং সময়ের একক ফুট ও সেকেণ্ডে পরিবর্তন করা হইয়াছে।

(2) একটি কণা সেকেণ্ডে 100 সেঁ. মি, বেগে যাত্রা আরম্ভ করে। ইহা -2 সে. মি./সে^{2} সমমন্দনে চলিলে কতদূর গিয়া এবং কতসময় পরে স্থিরাবস্থায় আসিবে ?

উ। $u=100$ সে. মি./সে. $f=-2$ সে. মি./সে^{2} অর্থাৎ মন্দন$=2$ সে. মি./সে^{2} ; $v=0$. s এবং t নির্ণয় করিতে হইবে।

$v^2=u^2-2fs$ সূত্র হইতে

$0=100^2-2.2s \quad \therefore \quad 4s=100\times100$

or, $s=2500$ সে. মি.

আবার $v=u-ft$ সূত্র হইতে

$0=100-2.t \quad \therefore \quad t=50$ সেকেণ্ড।

$\therefore$ কণাটি 2500 সে. মি. পথ অতিক্রম করিয়া এবং 50 সেকেণ্ড পরে স্থিরাবস্থায় আসিবে।

(3) একটি রেলগাড়ী ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে যাইতেছিল। ষ্টীম বন্ধ করিয়া ব্রেক কষা হইলে, ইহা $1\frac{1}{2}$ মিনিটে থামিয়া যায়। এই সময়ে উহার মন্দন সম হইলে এই মন্দন নির্ণয় কর এবং থামিবার পূর্বে গাড়ীটি কতদূর যায় তাহা নির্ণয় কর।

উ। $u=$ ঘণ্টায় 30 মাইল $=\dfrac{30\times1760\times3}{60\times60}=44$ ফু./সে.

$v=0$, $t=\frac{3}{2}$ মি. $=\frac{3}{2}\times60=90$ সে.

মনে কর, নির্ণেয় মন্দন $=f$

$v=u-ft$ হইতে

$0=44-f.\,90$; $\therefore\ f=\frac{44}{90}=\frac{22}{45}$ ফু./সে.^{2}

এখন মনে কর, নির্ণেয় দূরত্ব $=x$

$v^2=u^2-2fs$ হইতে

$0=44^2-2\times\frac{22}{45}\times x$

$$\therefore\quad x=\frac{44\times44\times45}{2\times22}=1980 \text{ ফুট}$$

[দূরত্ব নিম্ন উপায়েও নির্ণীত হইতে পারে :

নির্ণেয় দূরত্ব $=\frac{1}{2}(u+v)t=\frac{1}{2}(44+0)\times90$

$=22\times90=1980$ ফুট।]

বিঃ দ্রঃ প্রশ্ন সমাধান করিবার সময়ে প্রয়োজনমত ফুট-সেকেণ্ড এককে (অথবা সেন্টিমিটার-সেকেণ্ড এককে) পরিবর্তন করিয়া লইবে।

(4) একটি কণা সমত্বরণে চলিতেছে। যাত্রার পর পঞ্চম সেকেণ্ডে এবং সপ্তম সেকেণ্ডে ইহা যথাক্রমে 250 এবং 330 সে. মি. পথ অতিক্রম করে। ইহার প্রারম্ভিক বেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রারম্ভিক বেগ u এবং ত্বরণ f

[t-তম সেকেণ্ডে সরণ $=u+\frac{1}{2}f(2t-1)$]

$250=$ পঞ্চম সেকেণ্ডে সরণ $=u+\frac{1}{2}f.\,9.\cdots(1)$

$330=$ সপ্তম সেকেণ্ডে সরণ $=u+\frac{1}{2}f.\,13\cdots(2)$

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া $80=2f$ $\therefore\ f=40$ সে. মি./সে^{2}.

এখন (1) হইতে $250=u+20\times9$ $\therefore\ u=70$ সে. মি./সে.

(5) একটি কণা 3 সেকেণ্ড সময় সমত্বরণে চলে এবং এই সময়ে ইহা 810 সে. মি. পথ অতিক্রম করে। তারপর ত্বরণ থামিয়া যায় এবং পরবর্তী 3 সেকেণ্ডে ইহা 720 সে. মি. পথ অতিক্রম করে। ইহার প্রারম্ভিক বেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রারম্ভিক বেগ $=u$ এবং ত্বরণ $=f$.

$s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হইতে

$810=3u+\frac{1}{2}f.\ 9$ অথবা $270=u+\frac{3}{2}f \cdots(1)$

$v=u+ft$ সূত্র হইতে

3 সেকেণ্ড পরে বেগ

$v=u+3f$

এখন ত্বরণ থামিয়া গেলে কণাটি সমবেগে চলে, যেহেতু পরবর্তী 3 সেকেণ্ডে অতিক্রান্ত পথ $=720$ সে. মি.

$\therefore\ 720=(u+3f)\ 3$ অথবা $240=u+3f \cdots(2)$

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া $\frac{3}{2}f=-30$

$\therefore\ f=-20$ সে. মি./সে^{2}

এখন (2) সমীকরণে f-এর মান বসাইয়া

$240=u-60\quad \therefore\ u=300$ সে.মি./সে.

6. একটি রেলগাড়ী স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া $2\frac{1}{2}$ মিনিট পরে ঘণ্টায় 48 মাইল বেগ লাভ করে। গাড়ীটি ঐ সময়ে কত মাইল দূরত্ব অতিক্রম করে ?

এখানে $u=0$, $v=48$ মাইল/ঘণ্টা, $t=2\frac{1}{2}$ মি. $=\frac{5}{2\times 60}=\frac{1}{24}$ ঘ. $f=?$

$v=ft$ সূত্র হইতে $48=f\times\frac{1}{24}\quad \therefore\ f=48\times 24$ মাইল/ঘণ্টা^{2}

এখন $s=\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র হইতে $s=\frac{1}{2}.\ (48\times 24)\times(\frac{1}{24})^2=1$ মাইল

$\therefore$ ঐ সময়ে গাড়ী 1 মাইল পথ অতিক্রম করে।

লক্ষ্য কর : এখানে আমরা ঘণ্টা এবং মাইলকে যথাক্রমে সময় ও দৈর্ঘ্যের একক নিয়াছি।

7. একটি কণা প্রারম্ভিক বেগ u লইয়া যাত্রা করে এবং একটি প্রদত্ত পথের প্রথম ও শেষার্ধ যথাক্রমে f_1 এবং f_2 ত্বরণে অতিক্রম করে। দেখাও যে অন্তিম বেগ $\frac{1}{2}(f_1+f_2)$ ত্বরণে সমস্ত পথ অতিক্রম করিলে যাহা হয় তাহারই সমান।

মনে কর, প্রথমার্ধ অতিক্রম করার পর বেগ v_1 এবং শেষার্ধ অতিক্রম করার পর বেগ v_2. তাহা হইলে

$$v_1^2=u^2+2f_1(\tfrac{1}{2}s) \qquad \cdots(1)$$

এবং $$v_2^2=v_1^2+2f_2(\tfrac{1}{2}s)=u^2+2f_1(\tfrac{1}{2}s)+2f_2(\tfrac{1}{2}s)$$
$$=u^2+(f_1+f_2)s \quad \cdots(2)$$

এখন, $\frac{1}{2}(f_1+f_2)$ ত্বরণে সমস্ত পথ অতিক্রম করিলে যদি অন্তিম বেগ v হয়, তাহা হইলে

$$v^2=u^2+2.\tfrac{1}{2}(f_1+f_2)\ s=u^2+(f_1+f_2)\ s. \quad \cdots(3)$$

$\therefore\ v_2=v.$

প্রশ্নমালা 3

1. u, f, v, s এবং t এই রাশিগুলিকে প্রচলিত অর্থে গ্রহণ করিয়—

(দৈর্ঘ্য এবং সময়ের একক ফুট এবং সেকেণ্ড)

(i) দেওয়া আছে $u=2, f=1, t=4$; v এবং s নির্ণয় কর।

(ii) দেওয়া আছে $u=10, f=-2, t=5$; v এবং s নির্ণয় কর।

(iii) দেওয়া আছে $u=8, v=4, s=12$; f এবং t নির্ণয় কর।

2. একটি বিন্দু স্থিরাবস্থা হইতে 4 সেন্টিমিটার-সেকেণ্ড একক ত্বরণ লইয়া যাত্রা করিলে কত সময় পরে উহার বেগ সেকেণ্ডে 60 সেন্টিমিটার হইবে ? এই সময় উহা কত দূর যাইবে ?

3. একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া 4 সেকেণ্ডে 40 ফুট পথ অতিক্রম করে। ইহার ত্বরণ নির্ণয় কর।

4. একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণে যাত্রা করিয়া 10 সেকেণ্ডে 400 সেন্টিমিটার পথ অতিক্রম করে। এই সময় অন্তে উহার বেগ নির্ণয় কর।

5. একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া চতুর্থ সেকেণ্ডে 122 ফুট পথ অতিক্রম করে। উহার ত্বরণ নির্ণয় কর।

6. একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণে যাত্রা করে। 3 সেকেণ্ড পরে যদি ইহার বেগ সেকেণ্ডে 24 ফুট হয় তাহা হইলে 8 সেকেণ্ড পরে ইহার বেগ কত ? 3 সেকেণ্ডে ইহা কত পথ যায় ? 8 সেকেণ্ডে ইহা কত পথ যায় ?

7. একটি কণা 10 সেকেণ্ডে 650 ফুট পথ অতিক্রম করে এবং তখন উহার বেগ সেকেণ্ডে 80 ফুট ; প্রারম্ভিক বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

8. একটি রেলগাড়ী স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া সমত্বরণে 3 মিনিটে এক মাইল পথ অতিক্রম করে ; তখন ইহার বেগ কত ? দুই মিনিটে ইহা কত পথ অতিক্রম করিয়াছিল ?

9. কোনও প্রাচীরের 3 ইঞ্চি ভেদ করিয়া একটি গুলির বেগ প্রাচীরে প্রবেশ সময়ে যে বেগ ছিল তাহার অর্ধেক হইয়া গেল। উহা আর কত ইঞ্চি ভেদ করিবে ?

10. একটি কণা কোনও প্রারম্ভিক বেগ লইয়া যাত্রা করে। 3 সেকেণ্ড সমত্বরণে চলিয়া উহা 81 ফুট পথ অতিক্রম করে ; তারপর পরবর্তী 3 সেকেণ্ডে বিনা ত্বরণে 72 ফুট যায়। ইহার প্রারম্ভিক বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

11. একটি কণা সেকেণ্ডে 60 ফুট বেগে যাত্রা করিয়া 2 ফুট/সে^{2} সমমন্দনে চলিতে থাকিলে দশম সেকেণ্ডে কত দূর যাইবে ? কত সময় পরে ইহা থামিয়া যাইবে ? কত পথ যাওয়ার পর ইহা থামিয়া যাইবে ?

12. একটি কণা সরল পথে পঞ্চম সেকেণ্ডে 25 ফুট এবং সপ্তম সেকেণ্ডে 33 ফুট পথ যায় ইহার ত্বরণ সম হইলে প্রারম্ভিক বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

13. দুইটি কণা একই সময় A বিন্দু হইতে AB সরল রেখা ধরিয়া একই অভিমুখে যাত্রা করে। প্রথম কণা প্রতি সেকেণ্ডে 40 ফুট সমবেগে চলে এবং দ্বিতীয় কণার প্রারম্ভিক বেগ সেকেণ্ডে 16 ফুট এবং সমত্বরণ 6 ফু./সে^{2}। কত সময় পরে দুইটি কণা আবার মিলিত হইবে ?

14. একটি গুলি সেকেণ্ডে 1600 ফুট বেগে লক্ষ্যে প্রবেশ করে। এক ইঞ্চি ভেদ করিয়া ইহার বেগ অর্ধেকে পরিণত হয়। মন্দন সম হইলে আর কতদূর গিয়া উহা থামিয়া যাইবে ?

15 সমত্বরণ-বিশিষ্ট একটি কণা সরল পথে একাদশ ও পঞ্চদশ সেকেণ্ডে যথাক্রমে 720 ফুট ও 960 ফুট পথ অতিক্রম করে। 20 সেকেণ্ডে ইহা কত পথ যায় ?

16. একটি রেলগাড়ীর ত্বরণ সম, ইহা চতুর্থ সেকেণ্ডে 19 ফুট এবং ষষ্ঠ সেকেণ্ডে 27 ফুট পথ অতিক্রম করে। দশম সেকেণ্ডে ইহা কত পথ অতিক্রম করে নিরূপণ কর।

17 160 গজ পথ অতিক্রম করিয়া একটি রেলগাড়ীর বেগ ঘণ্টায় 30 মাইল হইতে ঘণ্টায় 10 মাইলে পরিণত হইল। ইহার বেগ যদি সমভাবে কমে তাহা হইলে স্থিরাবস্থায় আসিবার আগে ইহা আর কতদূর যাইবে ?

18. একটি রেলগাড়ীর A ষ্টেশন হইতে B ষ্টেশনে যাইতে 50 সেকেণ্ড সময় লাগে ; B ষ্টেশন হইতে C ষ্টেশন যাইতেও 50 সেকেণ্ডে সময় লাগে, A হইতে B-এর দূরত্ব $\frac{1}{2}$ মাইল এবং B হইতে C-এর দূরত্ব $\frac{3}{4}$ মাইল, যদি ত্বরণ সমভাবে হইয়া থাকে তাহা হইলে ইহার মান কত ? A এবং C-তে বেগ ঘণ্টায় কত মাইল নির্ণয় কর।

19. একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া এক সরলরেখায় চলে। ইহা a সমত্বরণে যায়, পরে ইহা b সমমন্দনে যায়। যদি প্রথম হইতে আরম্ভ করিয়া t সময়ে s পথ চলিবার পর ইহা স্থিরাবস্থায় আসে প্রমাণ কর যে $t^2=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^s$

20. যদি একটি কণা p, q এবং r-তম সেকেণ্ডে যথাক্রমে a, b এবং c পথ অতিক্রম করে, প্রমাণ কর যে $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$.

21· সরলরেখায় সমত্বরণে চলমান একটি কণা তাহার গতির তৃতীয় সেকেণ্ডে 25 ফুট এবং ষষ্ঠ সেকেণ্ডে 55 ফুট যায়। 8 সেকেণ্ডে ইহা মোট কত দূরত্ব অতিক্রম করিবে তাহা নির্ণয় কর।

22. সমত্বরণে গতিশীল একটি কণা তাহার গতির শেষ সেকেণ্ডে সমস্ত পথের $\frac{9}{25}$ অংশ অতিক্রম করে। যদি ইহা স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া প্রথম সেকেণ্ডে 6 ইঞ্চি পথ গিয়া থাকে তাহা হইলে ইহা কত সময় চলিয়াছিল এবং কত পথ গিয়াছিল ?

ষষ্ঠ পরিচ্ছেদ

অভিকর্ষজ ত্বরণ—উল্লম্ব গতি
Acceleration due to gravity—Vertical Motion

[**শব্দ-পরিচিতি :** অভিকর্ষজ ত্বরণ, পতনজ বেগ, চরম উচ্চতা, উত্থিতি কাল।]

6-1. এক সরলরেখায় গতিশীল সমত্বরণ-বিশিষ্ট বস্তুর গতি পূর্ব পরিচ্ছেদে আলোচনা করিয়াছি। 5-1 অনুচ্ছেদের সূত্র তিনটির সাহায্যে এরূপ গতিবিশিষ্ট সকল প্রশ্নের সমাধান করা যায়।

6-2. আমরা অহরহ প্রত্যক্ষ করি যে যখন কোন ভারী বস্তু নীচের দিকে পড়িতে থাকে, তখন তাহার বেগ ক্রমশঃ বৃদ্ধি পায়। অতএব ইহার ত্বরণ আছে। এই ত্বরণকে **অভিকর্ষজ ত্বরণ** বলে। ইহাকে 'g' অক্ষর (gravity শব্দের আদি অক্ষর) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

[পৃথিবী প্রত্যেক বস্তুকে নীচের দিকে অর্থাৎ তাহার কেন্দ্রের দিকে আকর্ষণ করে ; এই আকর্ষণ-বলকে **অভিকর্ষ** (**gravity**) বলা হয়। বল-প্রয়োগের ফলে বস্তুর বেগ বাড়ে অর্থাৎ তাহার ত্বরণ হয়।]

6-3. পূর্বে লোকের ধারণা ছিল, (এমন কি বড় বড় পণ্ডিতেরাও বিশ্বাস করিতেন) হাল্কা বস্তু ধীরে পড়ে এবং ভারী বস্তু বেগে পড়ে। বিজ্ঞানী ও জ্যোতিষী গ্যালিলিও সর্বপ্রথম উপলব্ধি করেন যে ইহা ঠিক নয়। পাইসার (**Pisa**) উঁচু হেলান মিনারের উপর উঠিয়া বিভিন্ন ভরের বস্তুসমূহ একই সময়ে ছাড়িয়া দিয়া তিনি দেখিলেন, (বাতাসের বাধা না থাকিলে) সকল বস্তুই একই সময়ে মাটিতে আসিয়া পৌঁছে। ইহা হইতে তিনি বুঝিতে পারিলেন যে, সকল বস্তুর নীচের দিকে ত্বরণ এক এবং আরও পরীক্ষা করিয়া নির্ণয় করেন যে, এই নিম্নাভিমুখী ত্বরণ সম।

6-4. তোমরা নিজেরা নিম্নের পরীক্ষাটি করিয়া দেখিও।

পরীক্ষা : একটি টাকা লও। উহা হইতে সামান্য কম বৃত্তাকারে এক টুকরা কাগজ কাটিয়া লও এবং উহা টাকার উপর রাখ। এখন সাবধানে উঁচু হইতে টাকাটি ছাড়িয়া দাও। যদিও কাগজের টুকরাটি তুমি টাকার সঙ্গে আটকাইয়া রাখ নাই, টাকা এবং কাগজের টুকরা একসঙ্গে মাটিতে আসিয়া পৌঁছে। টাকাটি নীচে থাকাতে কাগজ বাতাসের বাধা হইতে রক্ষা পাইয়াছে মাত্র। পৃথক্ ভাবে একই উচ্চতা হইতে একই সময়ে ছাড়িয়া দেখ কাগজ টাকার পরে মাটিতে পৌঁছে। তাহা হইলে দেখা গেল, বাতাসের বাধা না পাইলে কাগজ এবং টাকা একই সময়ে নীচের দিকে সমান রত্ব অতিক্রম করে। অতএব উভয়ের ত্বরণ সমান।

6-5. কোন বস্তু যদি 4 ফুট উঁচু হইতে পড়ে, তাহা হইলে মাটিতে পৌঁছিতে ইহার $\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড সময় লাগে ; 16 ফুট উঁচু হইতে পড়িলে সময় লাগে 1 সেকেণ্ড ; 64 ফুট উঁচু হইতে পড়িলে 2 সেকেণ্ড সময়ে ইহা মাটিতে আসিয়া পৌঁছে। আমরা জানি কোন বস্তু যদি স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া সমত্বরণ f লইয়া চলে, তাহা হইলে t সময়ের সরণ $s=\frac{1}{2}ft^2$

এই সূত্রে, $t=\frac{1}{2}$ এবং $s=4$ বসাইলে, $4=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})^2$ $\therefore$ $f=32$

$t=1$ এবং $s=16$ বসাইলে, $16=\frac{1}{2}f.1^2$. $f=32$.

$t=2$ এবং $s=64$ বসাইলে, $64=\frac{1}{2}f.2^2$. $f=32$.

প্রত্যেক ক্ষেত্রেই f-এর মান পাওয়া গেল 32 ফু./সে.^{2}।

অতএব অভিকর্ষজ ত্বরণ (মোটামুটি) 32 ফু./সে.^{2}।

অভিকর্ষজ ত্বরণের সঠিক পরিমাপ নানা বৈজ্ঞানিক উপায়ে নির্ণীত হইয়াছে।

আমরা ইহার স্থূল পরিমাপ এফ্. পি. এস্. এককে 32 ফু./সে.^{2} এবং সি. জি. এস্. এককে $\frac{980 \text{ সেন্টিমিটার}}{\text{সেকেণ্ড}^2}$ গ্রহণ করিব।

6-6. স্থিরাবস্থা হইতে অভিকর্ষহেতু গতি :

কোন বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে পড়িতে থাকিলে $u=0$ $f=g$; যদি t সময় পরে বেগ v হয় এবং নিম্নাভিমুখী সরণ h হয় ; তাহা হইলে 5-1 অনুচ্ছেদের সূত্র তিনটি হইতে

$$v=gt \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(1)$$

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(2)$$

$$v^2=2gh \text{ অথবা } v=\sqrt{2gh} \quad \cdots(3)$$

দ্রষ্টব্য :—(i) $\sqrt{2gh}$ কে h-উচ্চতা হইতে পতনজ বেগ বলে

(ii) h-উচ্চতা হইতে মাটিতে পৌঁছিতে t সময় লাগিলে

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \text{ হইতে } t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

লক্ষ্য কর :—

t-তম সেকেণ্ডে পতিত দূরত্ব$=\frac{1}{2}g\,(2t-1)$

[5-2 অনুচ্ছেদে $u=0$ এবং $f=g$ কর ;

অথবা নির্ণেয় দূরত্ব$=\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}g\,(t-1)^2$ ব্যবহার কর।]

6-7. প্রারম্ভিক বেগ দিয়া নিম্নাভিমুখী নিক্ষিপ্ত বস্তুর গতি

প্রারম্ভিক বেগ u দিয়া কোন বস্তুকে নিম্নদিকে নিক্ষেপ করিলে f স্থলে g লিখিয়া আমরা 5-1 অনুচ্ছেদের সূত্র হইতে সময় t, অন্তিম বেগ v এবং নিম্নদিকে সরণ h-এর সম্বন্ধ পাই।

$$v=u+gt \quad \cdots(4)$$
$$h=ut+\tfrac{1}{2}gt^2 \quad \cdots(5)$$
$$v^2=u^2+2gh \quad \cdots(6)$$

উদাহরণ : (1) কূপের মুখ হইতে একটি ঢিল ছাড়িয়া দিলে যদি উহা $1\frac{3}{4}$ সেকেণ্ড পরে কূপের তলায় পৌঁছে তাহা হইলে কূপটির গভীরতা কত ?

মনে কর, গভীরতা h, তাহা হইলে

$$h=\tfrac{1}{2}\,gt^2=16\times(\tfrac{7}{4})^2=49 \text{ ফুট।}$$

(2) কুতবমিনারের উচ্চতা 238 ফুট ; উহার চূড়া হইতে একটি প্রস্তর খণ্ড ফেলিলে কত সময় পরে উহা মাটিতে পৌঁছিবে ?

$h=238$ ফুট ; যদি t-সেকেণ্ড পরে ইহা মাটিতে পৌঁছে তাহা হইলে $h=\frac{1}{2}gt^2$ সূত্র হইতে $238=16t^2$

$$\text{অথবা } t^2=\frac{238}{16}$$

$$\therefore \quad t=\frac{\sqrt{238}}{4}$$

$$=\frac{15{\cdot}43}{4}=3{\cdot}86 \text{ সেকেণ্ড (আসন্নমান)।}$$

3. একটি বহুতল বাড়ীর সর্বনিম্ন তলার উচ্চতা 20 ফুট। বাড়ীর ছাদ হইতে একটি প্রস্তর খণ্ড ছাড়িয়া দিলে তাহা $\frac{1}{4}$ সেকেণ্ড সময়ে সর্বনিম্ন তলা অতিক্রম করে। বাড়ীটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

ধর, প্রারম্ভিক বেগ u লইয়া প্রস্তর খণ্ডটি সর্বনিম্ন তল অতিক্রম করে, তাহা হইলে u প্রারম্ভিক বেগ লইয়া ইহা $\frac{1}{4}$ সেকেণ্ড সময়ে 20 ফুট অতিক্রম করে।

$$\therefore \quad 20=u\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times g\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{u}{4}+\frac{1}{2}\times32\times\frac{1}{16}=\frac{u}{4}+1$$

$\therefore \quad u=76$ ফু./সে.

এই বেগ লাভ করার পূর্বে যদি ইহা h ফুট দূরত্ব পতিত হয়, তাহা হইলে $76^2=2gh=2\times32h \quad [\,v^2=2gh\,]$

$\therefore \quad h = \frac{76 \times 76}{64} = \frac{361}{4} = 90\frac{1}{4}$ ফুট

অতএব বাড়ীর উচ্চতা $= 90\frac{1}{4} + 20 = 110\frac{1}{4}$ ফুট।

(4) কত প্রাথমিক বেগ দিয়া একটি বস্তুকে নীচের দিকে নিক্ষেপ করিলে উহা 10 সেকেণ্ডে 1800 ফুট অতিক্রম করিবে?

$h = 1800$ ফুট, $t = 10$ সেকেণ্ড, u নির্ণয় করিতে হইবে।

$h = ut + \frac{1}{2}gt^2$ সূত্র হইতে

$1800 = u \times 10 + 16 \times 10^2$

$10u = 1800 - 1600 = 200 \quad \therefore \quad u = 20$ ফু./সে.

সুতরাং বস্তুটি সেকেণ্ডে 20 ফুট বেগে নিক্ষেপ করিতে হইবে।

6-8. উৎক্ষিপ্ত বস্তুর গতি :

u প্রাথমিক বেগ দিয়া কোন বস্তুকে উপরদিকে ছুড়িয়া দিলে 5-1 অনুচ্ছেদের সূত্রসমূহে f স্থলে $-g$ লিখিয়া এবং s-এর পরিবর্তে উৎক্ষেপস্থল হইতে উচ্চতা h লিখিয়া আমরা অন্তিম বেগ v, সময় t এবং h-এর জন্য পাই

$$v = u - gt \quad \cdots(7)$$
$$h = ut - \tfrac{1}{2}gt^2 \cdots(8)$$
$$v^2 = u^2 - 2gh \cdots(9)$$

বেগ, সরণ এবং ত্বরণের চিহ্নের (+ অথবা −) জন্য নিম্নলিখিত নিয়ম সুবিধাজনক।

প্রারম্ভিক বেগের দিকে v, s, f (+) ধনাত্মক

প্রারম্ভিক বেগের বিপরীত দিকে ঋণাত্মক (−)

সুতরাং উঠিবার সময় v ধনাত্মক এবং নামিবার সময় ঋণাত্মক ; ত্বরণ নীচের দিকে (প্রারম্ভিক বেগের বিপরীতমুখী) বলিয়া ঋণাত্মক ($-g$)।

উঠিবার সময় $v = u - gt$ সূত্রে v ধনাত্মক, ইহা t বাড়িবার সঙ্গে সঙ্গে কমিতে থাকে এবং যখন $gt = u$ হয় তখন $v = 0$. বস্তুটি এই মুহূর্তে স্থির, তারপর ইহা নীচের দিকে নামিতে থাকে, এবং h কমিতে থাকে। যখন ইহা প্রক্ষেপস্থলে ফিরিয়া আসে, তখন h শূন্য (0) হইয়া যায়। বস্তুটি প্রক্ষেপস্থলের নীচে গেলে h ঋণাত্মক হয়।

আবার $v^2 = u^2 - 2gh$ সূত্র হইতে $v = \pm\sqrt{u^2 - 2gh}$

অতএব একটি বস্তুকে উপরদিকে ছুড়িয়া দিলে গতিপথের যে-কোন বিন্দুতে **বেগের মান উঠিবার সময় এবং নামিবার সময় এক।**

6-9. চরম উচ্চতায় পৌঁছিবার সময় নির্ণয় (To find the time to reach the greatest height) :

ধর, নির্ণেয় সময় T

চরম উচ্চতায় পৌঁছিলে, $v=0$

$\therefore$ $v=u-gt$ সূত্র হইতে $0=u-gT$ সুতরাং $T=\frac{u}{g}$

6-10. চরম উচ্চতা নির্ণয় (To find the greatest height attained) :

ধর, H নির্ণেয় চরম উচ্চতা। এই উচ্চতায় $v=0$, কারণ, তাহা না হইলে বস্তুটি উঠিতে থাকিত।

$v^2=u^2-2gh$ সূত্রে, v-এর স্থলে 0 এবং h-এর স্থলে H লিখিয়া $0=u^2-2gH$ $\therefore$ $H=\frac{u^2}{2g}$

6-11. উত্থিতি কাল নির্ণয় (To find the time of flight) :

সংজ্ঞা : প্রক্ষেপ মুহূর্ত হইতে আরম্ভ করিয়া চরম উচ্চতায় পৌঁছিয়া আবার প্রক্ষেপ-স্থলে ফিরিয়া আসিতে যে সময় লাগে তাহাকে **উত্থিতি কাল** বলে।

চরম উচ্চতায় পৌঁছিবার পর বস্তুটি আবার নীচের দিকে পড়িতে থাকে। যখন প্রক্ষেপ-স্থলে ফিরিয়া আসে তখন তাহার উচ্চতা 0 ; অতএব,

$h=ut-\frac{1}{2}gt^2$ সূত্রে $h=0$ লিখিয়া পাই

$0=ut-\frac{1}{2}gt^2=t(u-\frac{1}{2}gt)$

$\therefore$ $t=0$ কিংবা $u-\frac{1}{2}gt=0$, ইহা হইতে $t=\frac{2u}{g}$.

যাত্রাসময়ে $t=0$, সুতরাং **উত্থিতি কাল**$=\frac{2u}{g}$

আমরা আগে পাইয়াছি,

চরম উচ্চতায় পৌঁছিবার সময়$=\frac{u}{g}$

তাহা হইলে

চরম উচ্চতায় পৌঁছিতে সময়=উত্থিতিকালের অর্ধেক।

অতএব **চরম উচ্চতায় উঠিবার সময়=চরম উচ্চতা হইতে প্রক্ষেপ-স্থলে নামিবার সময়।**

6-12. কোন প্রদত্ত উচ্চতায় পৌঁছিবার সময় নির্ণয় :

h-উচ্চতায় পৌঁছিতে যদি t সময় লাগে, তাহা হইলে

$$h = ut - \tfrac{1}{2}gt^2$$

এই সমীকরণ সমাধান করিলে আমরা h উচ্চতায় পৌঁছিবার সময় পাই। ইহা হইতে t-এর দুইটি মান পাওয়া যায়। তাহার কারণ এই যে, বস্তুটি একবার উঠিবার সময়, পরে আবার নামিবার সময় প্রদত্ত উচ্চতায় পৌঁছে।

দৃষ্টান্ত : (1) একটি বস্তুকে সেকেণ্ডে 64 ফুট বেগে উপর দিকে ছুঁড়িয়া দিলে কত সময় পরে উহা 48 ফুট উপরে পৌঁছিবে ?

$h = ut - \frac{1}{2}gt^2$ হইতে

$48 = 64t - 16t^2$

অথবা, $3 = 4t - t^2$ অথবা, $t^2 - 4t + 3 = 0$

অথবা, $(t-1)(t-3) = 0$;

$\therefore \quad t = 1$ কিংবা $t = 3$,

উৎক্ষেপের 1 সেকেণ্ড পরে একবার এবং 3 সেকেণ্ড পরে আর একবার ইহা 48 ফুট উচ্চে থাকে।

(2) উপরের উদাহরণে চরম উচ্চতা এবং এই উচ্চতায় পৌঁছিবার সময় নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় চরম উচ্চতা H.

যেহেতু চরম উচ্চতায় বেগ $= 0$,

$\therefore \quad v^2 = u^2 - 2gh$ হইতে $0 = u^2 - 2gH$

$$H = \frac{u^2}{2g} = \frac{64 \times 64}{2 \times 32} = 64 \text{ ফুট।}$$

মনে কর, চরম উচ্চতায় পৌঁছিতে T সময় লাগে, তাহা হইলে,

$0 = u - gT$ হইতে

$$T = \frac{u}{g} = \frac{64}{32} = 2 \text{ সেকেণ্ড।}$$

(3) 160 ফুট উচ্চ এক মিনারের শীর্ষদেশ হইতে একটি প্রস্তর খণ্ড ছাড়িয়া দেওয়া হইল। একই সময়ে অপর একটি প্রস্তর খণ্ড মিনারের পাদদেশ হইতে সেকেণ্ডে 64 ফুট বেগে উপর দিকে ছুঁড়িয়া দেওয়া হইল। ইহারা কত সময় পরে এবং কোথায় মিলিত হইবে ?

মনে কর, মিলিত হইবার সময় প্রথম প্রস্তর খণ্ড x ফুট পড়ে, তাহা হইলে দ্বিতীয় প্রস্তর খণ্ড একই সময়ে $160-x$ উঠে।

$$x=\frac{1}{2}gt^2 \quad \cdots(1)$$

$$160-x=64t-\frac{1}{2}gt^2 \quad \cdots(2)$$

যোগ করিয়া $160=64t \quad \therefore \quad t=\frac{160}{64}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড

তাহারা $2\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড পরে মিলিত হয়।

এখন $x=16t^2=16\times\left(\frac{5}{2}\right)^2=100$ ফুট।

অতএব প্রস্তর খণ্ড দুইটি শীর্ষদেশ হইতে 100 ফুট নীচে এবং পাদদেশ হইতে 60 ফুট ঊর্ধ্বে মিলিত হয়।

(4) 400 ফুট উচ্চ এক পাহাড়ের পাদদেশ হইতে একটি প্রস্তর খণ্ড যে বেগে খাড়া উপরদিকে ছুড়িয়া দেওয়া হইল তাহা প্রস্তর খণ্ডটিকে ঠিক শীর্ষদেশে নিয়া যাইতে পারে। ইহা ছুড়িবার এক সেকেণ্ড পরে আর একটি প্রস্তর খণ্ড শীর্ষদেশ হইতে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। ইহারা কখন এবং কোথায় মিলিত হইবে?

প্রথম প্রস্তর খণ্ডের প্রারম্ভিক বেগ u হইলে $0=u^2-2g.400$

$\therefore \quad u=\sqrt{2\times32\times400}=160$ ফু./সে.

মনে কর, প্রথম প্রস্তর খণ্ড t সেকেণ্ড পরে দ্বিতীয় প্রস্তর খণ্ডের সহিত মিলিত হয়, তাহা হইলে

প্রথম প্রস্তর খণ্ডের t সময়ে উত্থিত দূরত্ব এবং দ্বিতীয় প্রস্তর খণ্ডের $t-1$ সেকেণ্ড সময়ে পতিত দূরত্বের সমষ্টি $=400$ ফুট।

$\therefore \quad 160t-\frac{1}{2}gt^2+\frac{1}{2}g(t-1)^2=400$ অর্থাৎ $160t-16(2t-1)=400$

অথবা $128t=384 \quad \therefore \quad t=3$ সেকেণ্ড।

দ্বিতীয় প্রস্তর খণ্ডের পতিত দূরত্ব $=\frac{1}{2}g\ (t-1)^2=16\times2^2=64$ ফুট।

শীর্ষদেশ হইতে মিলনস্থানের দূরত্ব 64 ফুট এবং পাদদেশ হইতে উচ্চতা $400-64=336$ ফুট।

(5) উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বদিকে প্রক্ষিপ্ত একটি কণা t সেকেণ্ড পরে h উচ্চতায় পৌঁছে। যদি আরও t' সেকেণ্ড পরে ইহা পুনরায় ভূমিতে আসিয়া পড়ে, প্রমাণ কর যে, $h=\frac{1}{2}gtt'$.

$$h=ut-\frac{1}{2}gt^2 \cdots(1)$$

যেহেতু $t+t'=$ সমগ্র উত্থিতিকাল

$$\therefore \quad 0=u(t+t')-\frac{1}{2}g(t+t')^2\cdots(2)$$

(2) হইতে $u=\frac{1}{2}g(t+t')$

সমীকরণ (1)-এ u-এর মান বসাইয়া

$h=\frac{1}{2}g(t+t')\,t-\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}gtt'$

*(6) একটি উল্লম্ব মিনারের শীর্ষ হইতে যখন একটি ঢিল x ফুট পতিত হইয়াছে সেই সময় শীর্ষদেশের y ফুট নীচে একটি বিন্দু হইতে আর একটি ঢিল ছাড়িয়া দেওয়া হয়। যদি উভয়ে স্থিরাবস্থা হইতে পড়িতে আরম্ভ করিয়া একই সময়ে ভূমিতে পৌঁছে, দেখাও যে, মিনারের উচ্চতা $\frac{(x+y)^2}{4x}$ ফুট।

x ফুট পড়িবার পর প্রথম ঢিলের বেগ $\sqrt{2gx}$

মনে কর, মিনারের উচ্চতা h ফুট। তাহা হইলে ভূপতিত হইবার পূর্বে একই সময়ে t-তে প্রথম ঢিল $\sqrt{2gx}$ প্রারম্ভিক বেগ লইয়া $h-x$ দূরত্ব পড়িবে এবং দ্বিতীয় ঢিল স্থিরাবস্থা হইতে $h-y$ দূরত্ব পড়িবে।

$$\therefore\quad h-x=\sqrt{2gx}.t+\tfrac{1}{2}gt^2 \cdots(1)$$

$$h-y=\tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \cdots(2)$$

বিয়োগ করিয়া $y-x=\sqrt{2gx}.t \quad \therefore\ t=\frac{y-x}{\sqrt{2gx}}$

এখন সমীকরণ (2) হইতে

$$h=y+\tfrac{1}{2}g\,\frac{(y-x)^2}{2gx}=\frac{4xy+(y-x)^2}{4x}=\frac{(x+y)^2}{4x}$$

*(7) একটি লিফ্‌ট্ f ফু./সে^{2}. ত্বরণে উঠিতেছে। লিফ্‌টে অবস্থিত একজন লোক লিফ্‌ট্ সম্পর্কে v আপেক্ষিক বেগে একটি গোলক উপর দিকে ছুঁড়িয়া দিয়া t সেকেণ্ড পরে উহা ধরিয়া ফেলে ; দেখাও যে, $f+g=\frac{2v}{t}$.

মনে কর, গোলক ছুড়িবার সময় লিফ্‌টের বেগ u, তাহা হইলে গোলকের প্রকৃত বেগ $u+v$. যেহেতু গোলক এবং লিফ্‌ট t সময়ে সমান উল্লম্ব দূরত্ব অতিক্রম করে,

$$ut+\tfrac{1}{2}ft^2=(u+v)t-\tfrac{1}{2}gt^2,$$

$$\tfrac{1}{2}(f+g)t^2=vt.$$

$$\therefore\quad f+g=\frac{2v}{t}.$$

6-13. **বিবিধ উদাহরণ :**

(1) **গতিশীল বেলুন হইতে প্রক্ষিপ্ত বস্তু :**

যদি গতিশীল বেলুন হইতে একটি বস্তু ছাড়িয়া দেওয়া হয় তাহা হইলে বস্তুটির প্রারম্ভিক বেগ বেলুনের তৎকালীন বেগের সমান। অতএব উল্লম্বভাবে ঊর্ধ্বগামী বা নিম্নগামী বেলুন হইতে কোন বস্তু ছাড়িয়া দিলে তাহার গতি বিষয়ক প্রশ্ন সমাধান করিতে পারি।

উদাহরণ : (1) সেকেণ্ডে 32 ফুট বেগে ঊর্ধ্বগামী একটি বেলুন হইতে একটি প্রস্তর খণ্ড ছাড়িয়া দেওয়া হয় এবং উহা 17 সেকেণ্ড পরে ভূতলে আসিয়া পৌঁছে। প্রস্তর খণ্ড ছাড়িবার সময় বেলুন কত উঁচুতে ছিল ?

মনে কর, বেলুন h-উচ্চতায় ছিল। 17 সেকেণ্ড সময়ে ঢিলের সরণ হইয়াছে $-h$ ফুট, ঢিলের প্রারম্ভিক বেগ $u=32$ ফু./সে. উপরদিকে (যেহেতু ইহা বেলুনের বেগের সমান)। সরণ h এবং ত্বরণ g নীচের দিকে বলিয়া তাহারা ঋণাত্মক।

$$-h=32\times17-\tfrac{1}{2}g.17^2=32\times17-16\times17\times17\ ;$$

$$\therefore\quad h=17\times16(17-2)=17\times16\times15$$

$$=4080 \text{ ফুট।}$$

বেলুনটি 4080 ফুট উচ্চতায় ছিল।

(2) স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া একটি বেলুন 4 ফুট/সেকেণ্ড^2 সমত্বরণে উপরদিকে উঠিতেছে। 16 সেকেণ্ড পরে বেলুন হইতে একটি ঢিল ছাড়িয়া দেওয়া হইল। কত সময় পরে ঢিলটি মাটিতে পৌঁছিবে ?

$s=\frac{1}{2}ft^2$ সূত্র ব্যবহার করিয়া

16 সেকেণ্ড পরে বেলুনের উচ্চতা $=\frac{1}{2}\times4\times16^2=2\times16\times16$ ফুট ···(1)

$v=ft$ সূত্র হইতে বেগ $=4\times16=64$ ফু./সে. ···(2)

[লক্ষ্য কর : বেলুন স্থিরাবস্থা হইতে সমত্বরণে উঠিতেছে ; এখানে $s=\frac{1}{2}ft^2$ এবং $v=ft$ প্রযোজ্য]

যদি t সেকেণ্ড পরে ঢিলটি মাটিতে পৌঁছে

যেহেতু $u=64$ ফু./সে., h (সরণ) $=-2\times256$ ফু.

$f=-g=32$ ফু./সে^{2}.,

$$\therefore\quad -2\times256=64t-16t^2 \text{ অথবা } t^2-4t-32=0$$

$$\text{অথবা } (t-8)(t+4)=0$$

$\therefore$ $t=8$ বা -4 ; কিন্তু t ঋণরাশি হইতে পারে না ; $\therefore$ $t=8$ সেকেণ্ড।

(3) একটি ঢিল কূপের মুখ হইতে ফেলিয়া দিবার $7\frac{7}{10}$ সেকেণ্ড পরে জলে পড়ার শব্দ শোনা গেল। যদি শব্দের বেগ সেকেণ্ডে 1120 ফুট হয়, তাহা হইলে কূপের গভীরতা কত?

মনে কর কূপের গভীরতা h-ফুট এবং ঢিল t সময়ে জলে পৌঁছে, তাহা হইলে শব্দ $(7\frac{7}{10}-t)$ সেকেণ্ড সময়ে h ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\frac{1}{2}gt^2=h=1120(7\frac{7}{10}-t)$; (যেহেতু শব্দ সমবেগে ভ্রমণ করে)

অথবা $16t^2=1120(7\frac{7}{10}-t)$;

or, $t^2-70(\frac{77}{10}-t)=0$

or, $t^2+70t-7\times 77=0$

or, $(t-7)(t+77)=0$

$\therefore$ $t=7$ সেকেণ্ড (কারণ, $t=-77$ সেকেণ্ড হইতে পারে না)।

এখন $h=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times 32\times 7^2=784$ ফুট।

প্রশ্নমালা 4

[g-এর মান 32 ফু./সে.^{2} এবং 980 সে. মি./সে.^{2}]

1. একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে নীচের দিকে পতিত হয় :

(i) 5 সেকেণ্ড পরে ইহার বেগ সেকেণ্ডে কত ফুট?

(ii) 5 সেকেণ্ডে ইহা কত ফুট পতিত হয়?

(iii) 64 ফুট পড়িতে কত সময় লাগে?

(iv) $\frac{1}{10}$ সেকেণ্ড পরে বেগ সেকেণ্ডে কত সেন্টিমিটার?

(v) 2 সেকেণ্ডে কত সেন্টিমিটার পতিত হয়?

(vi) 490 মিটার পড়িতে কত সময় লাগে?

(vii) 144 ফুট পতনজনিত বেগ নির্ণয় কর।

(viii) 144 ফুট পড়িতে কত সময় লাগে?

(ix) 250 সেন্টিমিটার পতনজনিত বেগ নির্ণয় কর।

(x) 250 সেন্টিমিটার পড়িতে কত সময় লাগে?

(xi) পঞ্চম সেকেণ্ডে কত ফুট পতিত হয়?

(xii) অষ্টম সেকেণ্ডে কত মিটার পতিত হয়?

2. স্থিতাবস্থা হইতে একটি নিম্নগামী বস্তু মাটিতে পৌঁছিবার পূর্ববর্তী এক সেকেণ্ড সময়ে 224 ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে। কত উঁচু হইতে ইহা পড়িয়াছে?

3. একটি মিনারের শীর্ষদেশ হইতে একটি বল ছাড়িয়া দেওয়া হইল। পতনকালের সর্বশেষ সেকেণ্ডে ইহা সমগ্র উচ্চতার 16/25 পতিত হয় ; মিনারের উচ্চতা নির্ণয় কর।

4. (a) একটি ঢিল সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে খাড়া উপরদিকে ছুড়িয়া দিলে,

(i) ইহা কত উঁচুতে পৌঁছিতে পারে?

(ii) কত সময়ে ইহা চরম উচ্চতায় পৌঁছিবে?

(iii) কখন ইহা প্রক্ষেপ বিন্দু হইতে 96 ফুট উচ্চতা লাভ করে?

(iv) ইহার উত্থিতিকাল নির্ণয় কর।

(v) প্রক্ষেপের 2 সেকেণ্ড পরে ইহার বেগ নির্ণয় কর।

(vi) প্রক্ষেপের 3 সেকেণ্ড পরে বেগ নির্ণয় কর।

(b) একটি বস্তু খাড়া উপর দিকে সেকেণ্ডে 200 ফুট বেগে প্রক্ষিপ্ত হইলে উহা কি চরম উচ্চতা লাভ করিবে? কত সময় পরে উহা প্রক্ষেপ বিন্দুতে ফিরিয়া আসিবে?

5. একটি ঢিল সেকেণ্ডে 96 ফুট বেগে উপর দিকে ছুড়িয়া দেওয়া হইল। ইহা কি চরম উচ্চতা লাভ করিবে? অভিক্ষেপের 4 সেকেণ্ড পরে ইহার বেগ কত এবং তখন ইহা কত উঁচুতে?

6. (a) একটি বস্তু সেকেণ্ডে 104 ফুট বেগে উৎক্ষিপ্ত হইলে 3 সেকেণ্ড পরে উহার বেগ কত হইবে? কত সময় পরে বেগের মান প্রারম্ভিক বেগের সমান হইবে?

(b) একটি কণা উপরদিকে ছুঁড়িয়া দেওয়া হইল। যদি ইহা 144 ফুট চরম উচ্চতা লাভ করে তাহা হইলে প্রক্ষেপের কত সময় পরে উহা 80 ফুট উচ্চতা লাভ করে?

7. 300 ফুট উঁচু মিনারের চূড়া হইতে সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে একটি ঢিল উপরদিকে ছুড়িয়া দেওয়া হইল। কত সময় পরে ইহা ভূমিতে পৌঁছিবে?

8. 144 ফুট উঁচু মিনারের শীর্ষদেশ হইতে একটি বল ফেলা হইল। 256 ফুট চরম উচ্চতা লাভ করিতে পারে এরূপ বেগে একই সময়ে মিনারের পাদদেশ হইতে আর একটি বল ছুঁড়িয়া দেওয়া হইল। কত সময় পরে বল দুইটি পরস্পরের সম্মুখীন হইবে?

9. নিউইয়র্কের ওয়াল্ডর্ফ অ্যাস্টোরিয়া প্রাসাদের উচ্চতা 620 ফুট। এই প্রাসাদের ছাদ হইতে একটা বল ফেলিলে ইহা কত সময় পরে মাটিতে পৌঁছিবে? এম্পায়ার স্টেট বিল্ডিং ইহার দ্বিগুণ উচ্চ; ইহার ছাদ হইতে একটি বল ফেলিলে উহা কত সময় পরে মাটিতে পৌঁছিবে?

10. কত বেগে উপর দিকে একটি ঢিল ছুঁড়িলে ইহা 81 ফুট পর্যন্ত উপরে উঠিতে পারে?

11. কত বেগে একটা বল উপর দিকে ছুঁড়িয়া দিলে উহা 5 সেকেণ্ড পরে প্রক্ষেপবিন্দুতে ফিরিয়া আসিবে?

12 একটি বল উপর দিকে ছুঁড়িয়া দিবার 6 সেকেণ্ড পরে প্রক্ষেপ বিন্দুতে ফিরিয়া আসে। ইহা কত উঁচুতে উঠিয়াছিল। প্রক্ষেপের 2 সেকেণ্ড পরে ইহা চরম উচ্চতা হইতে কত নীচে ছিল?

13 উপর দিকে প্রক্ষিপ্ত একটি ঢিলকে P বিন্দু অতিক্রম করিয়া উপর দিকে উঠিতে দেখা গেল; ইহার 3 সেকেণ্ড পরে উহাকে এই বিন্দু দিয়া নীচে নামিতে দেখা গেল। এই P বিন্দুতে ঢিলের বেগ কত?

14. 100 ফুট চরম উচ্চতা লাভ করিতে পারে এমন বেগে একটি ঢিল উপর দিকে ছুঁড়িয়া দেওয়া হইল। একই বেগে 2 সেকেণ্ড পরে আর একটি ঢিল ছোঁড়া হইল। কখন এবং কোথায় তাহারা পরস্পরের সম্মুখীন হইবে?

15. একটি ঢিল কূপের মুখ হইতে ফেলিয়া দিবার $6\frac{5}{14}$ সেকেণ্ড পরে জলে পড়ার শব্দ শোনা গেল। শব্দের বেগ সেকেণ্ডে 1120 ফুট হইলে, কূপের গভীরতা নির্ণয় কর।

16. একটি বেলুন যখন 400 ফুট উপরে তখন তাহা হইতে একটি ঢিল ফেলা হইল এবং ইহা 6 সেকেণ্ডে মাটিতে পৌছিল। কত বেগে বেলুনটি উঠিতেছিল ?

17. সেকেণ্ডে 32 ফুট বেগে উর্ধ্বগামী একটি বেলুন হইতে একটি ঢিল ছাড়িয়া দেওয়া হয় এবং ইহা 10 সেকেণ্ডে মাটিতে পেঁছে। ঢিলটি ভূতল হইতে সর্বাধিক কত উচ্চে উঠে এবং ঢিল ছাড়িবার সময় বেলুন কত উচ্চে ছিল ?

18. উপরদিকে উঠিবার কালে 3 সেকেণ্ডে একটি কণা কোনও স্থানে পৌছে এবং যাত্রার 5 সেকেণ্ড পরে আবার সেই স্থানে ফিরিয়া আসে। ইহা কি চরম উচ্চতা লাভ করে এবং ইহার প্রারম্ভিক বেগ কত ?

19. দুইটি প্রস্তরখণ্ড পৃথক্ উচ্চতা হইতে ছাড়িয়া দেওয়া হইল এবং একসঙ্গে তাহারা ভূতলে আসিয়া পৌছে। প্রথম প্রস্তরখণ্ড 144 ফুট উচ্চতা হইতে এবং দ্বিতীয় প্রস্তরখণ্ড 121 ফুট উচ্চতা হইতে পড়ে। ছাড়িবার সময়ের ব্যবধান নির্ণয় কর।

20. একটি বেলুন সমবেগে 4 সেকেণ্ড কাল উঠিবার পর উহা হইতে একটি প্রস্তরখণ্ড ছাড়িয়া দেওয়া হইল এবং প্রস্তরখণ্ডটি 6 সেকেণ্ড সময়ে ভূতলে আসিয়া পৌছিল। বেলুনের বেগ নির্ণয় কর। কত উচ্চতা হইতে ঢিল ছাড়িয়া দেওয়া হইয়াছিল ?

21. একটি গুলি উল্লম্বভাবে উপর দিকে ছুঁড়িলে উহা 2 সেকেণ্ডে একটি মিনারের শীর্ষে উঠে এবং ইহার 5 সেকেণ্ড পরে ভূতলে ফিরিয়া আসে। মিনারের উচ্চতা কত মিটার ?

22. উল্লম্বভাবে উপর দিকে ছুঁড়িয়া দিলে একটি ঢিল এক সেকেণ্ড সময়ে 14·7 মিটার উঠে। উত্থিতিকাল নিরূপণ কর।

23. একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে পতিত হয় এবং সেকেণ্ডে 120 ফুট বেগে কোনও বিন্দু অতিক্রম করে। দুই সেকেণ্ড পূর্বে ইহা কোথায় ছিল এবং দুই সেকেণ্ড পরে ইহা কোথায় থাকিবে ?

24. একটি কণা উল্লম্বভাবে উর্ধ্বদিকে সেকেণ্ডে u ফুট বেগে প্রক্ষিপ্ত হইল। t সেকেণ্ড পরে একই বিন্দু হইতে একই প্রারম্ভিক বেগে আর একটি কণা উৎক্ষিপ্ত হইল। প্রমাণ কর যে প্রথম কণার যাত্রার $\left(\frac{t}{2}+\frac{u}{g}\right)$ সেকেণ্ড পরে উভয় কণা মিলিত হইবে।

25. তিনটি কণা একই সময়ে h_1, h_2, h_3 উচ্চতা হইতে যথাক্রমে u_1, u_2, u_3 বেগে উল্লম্বভাবে উৎক্ষিপ্ত হয় এবং তাহারা একই সঙ্গে ভূতলে পৌছে। দেখাও যে

$$u_1(h_2-h_3)+u_2(h_3-h_1)+u_3(h_1-h_2)=0$$

সপ্তম পরিচ্ছেদ

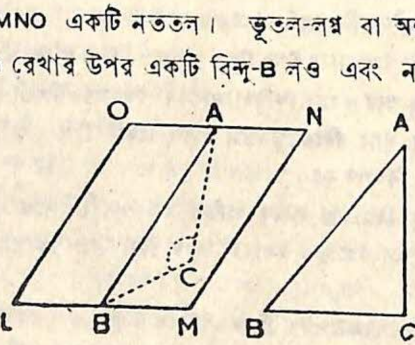
অভিকর্ষজ ত্বরণ ও মসৃণ নততলে গতি
Motion on a smooth inclined plane

7-1. নততল (Inclined plane) :

একটি কাষ্ঠফলক কিংবা পিঁড়ির একদিক ভূমিসংলগ্ন রাখিয়া অপর দিক খানিকটা উঁচু করিলে আমরা একটি নততল পাই। একটি রাস্তা বা রেলপথ পাহাড়ের গা বাহিয়া কোন নির্দিষ্ট নতিতে নামিয়া আসিলে উহা একটি নততল।

শক্ত মলাটের একটি খাতার একদিক টেবিলে রাখিয়া অন্য দিক উঁচু করিলে একটা নততল পাও।

নিম্নের চিত্রে LMNO একটি নততল। ভূতল-লগ্ন বা অনুভূমিক (hori-zontal) তললগ্ন LM রেখার উপর একটি বিন্দু-B লও এবং নততলে LM-এর



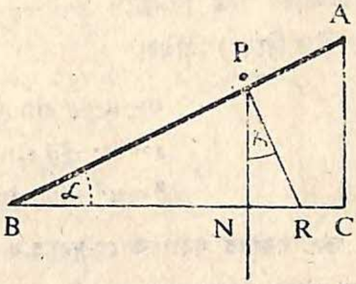
লম্ব BA অঙ্কিত কর। BA রেখা অনুভূমিক তলের সঙ্গে যে-কোণ করে তাহা নততলের **নতি (inclination)**। A হইতে একটি কণা ছাড়িয়া দিলে উহা AB রেখা বরাবর নামিয়া আসে। A হইতে অনুভূমিক তলের উপর AC লম্ব টান এবং BC যোগ কর। AB-কে নততলের **দৈর্ঘ্য**, AC-কে **উচ্চতা** এবং BC-কে **ভূমি** বলা হয়।

[নততল দেখাইতে ABC চিত্র লইলেই যথেষ্ট]

7-2. মসৃণ নততলের উপর গতি :

যখন একটি কণা কোন মসৃণ নততলে স্থাপন করিয়া ছাড়িয়া দেওয়া হয়, তখন তল বরাবর নীচের দিকে (AB-র দিকে) ইহার বেগ ক্রমশঃ সমভাবে বর্ধিত হইয়া থাকে।

আমরা জানি, প্রত্যেক বস্তুরই উল্লম্বভাবে নীচের দিকে অভিকর্ষজ ত্বরণ g আছে। তলের উপর কোনও বিন্দু P-তে একটি কণা রাখিয়া দিলে তলের জন্য উল্লম্বভাবে নীচের দিকে গতি হইতে পারে না। এখন মনে কর, তলের নতি α, ত্বরণ g-কে যদি তলের লম্ব PR-এর দিকে এবং তল বরাবর PB-র দিকে বিশ্লেষণ করা হয়, তাহা হইলে এই দুই দিকে উপাংশ যথাক্রমে $g \cos \alpha$ এবং $g \sin \alpha$ হইবে।



[ত্বরণের দিক্ ও মান আছে বলিয়া ত্বরণকেও বেগের মত উপাংশে বিশ্লেষণ করা যায়।]

তলের জন্য PR-এর দিকে গতি সম্ভব নয়, অতএব $g \sin \alpha$ ত্বরণ লইয়া কণাটি নীচের দিকে গড়াইয়া যাইবে।

7-2. (*a*) **নততলের উপর নিম্নাভিমুখী গতি ঃ** তলের শীর্ষ-A হইতে একটি কণা ছাড়িয়া দিলে নিম্নাভিমুখী গতির জন্য 5-1 অনুচ্ছেদের সূত্র তিনটিতে $u=0, f=g \sin \alpha$ লিখিয়া আমরা পাই

$$v=g \sin \alpha . t$$

$$s=\tfrac{1}{2}g \sin \alpha . t^2$$

$$v^2=2g \sin \alpha . s$$

তলের উচ্চতা ও দৈর্ঘ্যের অনুপাত $p : q$ হইলে কখনও কখনও বলা হয় নতি 'q-তে p' যেমন, নতি '16-তে 1', '13-তে 5' ইত্যাদি।

$$\textbf{লক্ষ্য কর, } \sin \alpha = \frac{\text{উচ্চতা}}{\text{দৈর্ঘ্য}} = \frac{p}{q}.$$

তলের শীর্ষদেশে স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া তলের দৈর্ঘ্য-l অতিক্রম করিবার পর বেগ V হইলে

$$V^2=2g \sin \alpha . l=2g\frac{h}{l}. l=2gh$$

$\therefore \quad V=\sqrt{2gh}=h$-উচ্চতা হইতে অবাধভাবে পতন-জনিত বেগ।

দ্রষ্টব্য ঃ এখানে লক্ষ্য কর যে, তলের শীর্ষ হইতে ভূমিতে পৌঁছিয়া বেগ তলের নতির উপর নির্ভর করে না ; উচ্চতার উপর নির্ভর করে।

7-2. (*b*) **নততলের উপর উচ্চাভিমুখী গতি ঃ** মনে কর, একটি কণাকে তল বরাবর উচ্চাভিমুখে u বেগ দিয়া ছুঁড়িয়া দেওয়া হইল। 5-1 অনুচ্ছেদের সূত্র তিনটিতে $f=-g \sin \alpha$ (যেহেতু ত্বরণ প্রারম্ভিক বেগের বিপরীত দিকে) লিখিয়া

$$v=u-g \sin \alpha.t$$
$$s=ut-\tfrac{1}{2}g \sin \alpha.t^2$$
$$v^2=u^2-2g \sin \alpha.s$$

তল বরাবর সর্বাধিক যে-দূরত্বে কণাটি পৌঁছিতে পারে, তাহা যদি L হয় তাহা হইলে যেহেতু তখন $v=0$

$$\therefore \quad 0=u^2-2g \sin \alpha.L \text{ অথবা } L=\frac{u^2}{2g \sin \alpha}$$

এই দূরত্বে পৌঁছিতে যদি T-সময় লাগে তাহা হইলে

$$0=u-g \sin \alpha.\mathrm{T} \quad \therefore \quad \mathrm{T}=\frac{u}{g \sin \alpha}$$

7-3. **উদাহরণ ঃ** 30° নতি এবং 10 ফুট দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট একটি মসৃণ নততলে একটি কণাকে কত বেগে তল বরাবর উপরদিকে ছুঁড়িয়া দিলে 1 সেকেণ্ড সময়ে উহা তলের শীর্ষে পৌঁছিবে ? কত সময় পরে ইহা প্রক্ষেপস্থলে ফিরিয়া আসিবে ?

মনে কর, u নির্ণেয় বেগ,

এখানে $s=10$ ফুট, $f=-g \sin 30°=-32\times\frac{1}{2}=-16$ ফু./সে^{2}

$\therefore \quad s=ut-\frac{1}{2}g \sin \alpha.t^2$ হইতে (অথবা $s=ut+\frac{1}{2}ft^2$ সূত্রে

$s=10, f=-16, t=1$)

$\therefore \quad 10=u.1-\frac{1}{2}\times16\times1^2=u-8 \quad \therefore \quad u=18$ ফু./সে.।

যখন কণা প্রক্ষেপস্থলে ফিরিয়া আসে তখন $s=0$

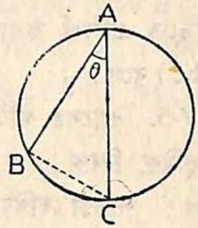
$\therefore \quad 0=18t-\frac{1}{2}.16.t^2=t\,(18-8t)$

অর্থাৎ $18-8t=0$; ($t=0$ প্রক্ষেপ সময়ে)

$\therefore \quad t=\frac{18}{8}=2\frac{1}{4}$ সেকেণ্ড।

প্রক্ষেপের $2\frac{1}{4}$ সেকেণ্ড পরে ইহা প্রক্ষেপস্থলে ফিরিয়া আসিবে।

7-3. একটি উল্লম্ববৃত্তের সর্বোচ্চ বিন্দু হইতে অঙ্কিত যে-কোন জ্যা বরাবর গড়াইয়া আসিতে একটি কণার যে সময় লাগে তাহা সকল জ্যার জন্যই এক।



মনে কর, সর্বোচ্চ বিন্দু A-র ভিতর দিয়া অঙ্কিত একটি জ্যা-AB লওয়া হইয়াছে এবং ইহা ঐ বিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত উল্লম্ব ব্যাস AC-র সহিত θ-কোণ করিয়া আছে। A হইতে B-তে আসিতে যদি T-সময় লাগে, তাহা হইতে $AB = \frac{1}{2}g\cos\theta . T^2$ (কারণ, AB-রেখার দিকে ত্বরণ g-র বিশ্লেষিতাংশ $g\cos\theta$)

$$\therefore \quad T^2 = \frac{2AB}{g\cos\theta} = \frac{2AB}{g\frac{AB}{AC}} = \frac{2AC}{g}$$

সুতরাং, $T = \sqrt{\frac{2AC}{g}}$

θ-কোণের মান যাহাই হউক না কেন, আমারা প্রত্যেক ক্ষেত্রে একই সময় পাই। ইহা বৃত্তের ব্যাসের উপরই নির্ভর করে।

অভিকর্ষজ ত্বরণ ও প্রাস

(Projectiles)

7-4. তোমরা দেখিতে পাও যে একটি ঢিল উল্লম্বদিকে না ছুঁড়িয়া উল্লম্বের সহিত কোন কোণে ছুঁড়িয়া দিলে উহা সোজা চলিয়া যায় না ; বক্র পথে চলিয়া কোন সর্বোচ্চ বিন্দুতে পৌঁছিবার পর বক্রপথেই ভূপৃষ্ঠে ফিরিয়া আসে। এই অধ্যায়ে আমরা এইরূপ গতির আলোচনা করিব এবং দেখিব যে এই বক্রপথ সর্বদাই একটি অধিবৃত্ত (parabola)।

সংজ্ঞা। শূন্যে যে-কোন দিকে প্রক্ষিপ্ত বস্তুকে **প্রাস** (Projectile) বলে। প্রাসের গতি আলোচনা করিবার সময়ে আমরা বাতাসের বাধা গ্রহণ করিব না।

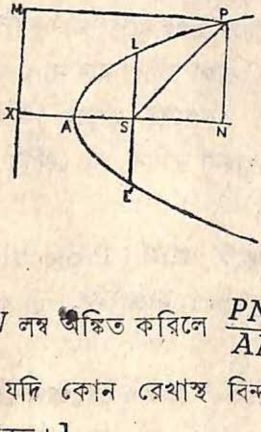
যে-বিন্দু হইতে একটি কণা প্রক্ষিপ্ত হয় তাহাকে ঐ কণার **প্রক্ষেপ-বিন্দু** (point of projection) বলে। যে প্রারম্ভিক বেগ দিয়া কণা প্রক্ষিপ্ত হয় তাহাকে **প্রক্ষেপ-বেগ** (velocity of projection) বলে। অনুভূমিক তলের সহিত প্রক্ষেপ-বেগ যে-কোণ করে তাহাকে **প্রক্ষেপ-কোণ**

(angle of projection) বলে। প্রক্ষেপ-বিন্দুর ভিতর দিয়া কোন প্রদত্ত সমতলের যে-বিন্দুতে প্রাস আসিয়া পতিত হয় প্রক্ষেপ-বিন্দু হইতে ঐ বিন্দুর দূরত্বকে প্রদত্ত তলে প্রাসের **প্রক্ষেপ-সীমা** (range) বলে। প্রক্ষেপ-বিন্দু হইতে যাত্রা করিয়া প্রক্ষেপ-বিন্দু-গামী অনুভূমিক তলে পুনরায় আসিয়া পৌঁছিতে প্রক্ষিপ্ত কণার যে-সময় লাগে তাহাকে **উথিতি কাল** (time of flight) বলে।

7-5. প্রাসের গতি আলোচনা করিবার সময় আমরা ইহার গতিকে অনুভূমিক দিকে এবং উল্লম্বদিকে পৃথক্‌ভাবে আলোচনা করিয়া লব্ধি নির্ণয় করিব। আমরা দেখিয়াছি প্রত্যেক বস্তুরই অভিকর্ষ হেতু উল্লম্ব নিম্নাভিমুখে একটি ত্বরণ g রহিয়াছে। প্রারম্ভিক বেগকে অনুভূমিক এবং উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ করিলে অনুভূমিক দিকে বেগের কোন পরিবর্তন নাই।

[7-6. **একটি প্রদত্ত বিন্দু এবং একটি প্রদত্ত রেখা হইতে সর্বদা সমান দূরে থাকিয়া কোন বিন্দু চলিতে থাকিলে উহার সঞ্চার পথকে (locus) অধিবৃত্ত (parabola) বলে।**

প্রদত্ত বিন্দুটিকে **নাভি** (focus) এবং প্রদত্ত রেখাটিকে **নিয়ামক** (directrix) বলা হয়। নাভি হইতে নিয়ামকের উপর লম্বরেখাকে **অক্ষ** (axis) বলে ; নাভির ভিতর দিয়া অক্ষের লম্বভাবে অবস্থিত জ্যাকে **নাভিলম্ব** (latus rectum) বলে। অক্ষ অধিবৃত্তকে যে-বিন্দুতে ছেদ করে তাহা অধিবৃত্তের **শীর্ষ** (vertex)।



পার্শ্বের বক্ররেখাটি অধিবৃত্ত। S ইহার নাভি, XM নিয়ামক, XAS রেখা অক্ষ, A শীর্ষ। রেখার উপর যে-কোন বিন্দু P লইলে $SP=PM$.

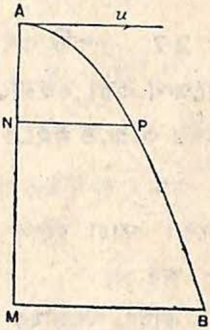
অধিবৃত্তের একটি ধর্ম এই যে ইহার উপরিস্থ কোন বিন্দু P হইতে অক্ষের উপর PN লম্ব অঙ্কিত করিলে $\dfrac{PN^2}{AN}=4AS$ (ধ্রুবক)

যদি কোন রেখাস্থ বিন্দু এই ধর্মসম্পন্ন হয় তাহা হইলে রেখাটি একটি অধিবৃত্ত।]

7-7. অনুভূমিক দিকে প্রক্ষিপ্ত কণা ঃ ভূ-পৃষ্ঠ হইতে উচ্চে কোন বিন্দু হইতে (যথা, কোন মিনারের চূড়া) **অনুভূমিক দিকে** u

বেগে একটি কণা প্রক্ষিপ্ত হইল। ইহার গতি আলোচনা কর এবং দেখাও যে গতিপথ একটি অধিবৃত্ত।

মনে কর, ভূপৃষ্ঠ হইতে উচ্চে A বিন্দু হইতে অনুভূমিক দিকে u বেগে প্রক্ষিপ্ত হইয়া একটি কণা t সময় পরে P অবস্থানে আসিয়াছে। A বিন্দুগামী উল্লম্বরেখার উপর PN লম্ব টানা হইয়াছে। P অবস্থানে কণার অনুভূমিক দিকে সরণ $PN=x$ (ধর); উল্লম্বদিকে সরণ $AN=y$ (ধর)।



যেহেতু অনুভূমিক দিকে কোন ত্বরণ নাই,

$$\therefore \quad x=PN=ut.$$

যেহেতু উল্লম্বদিকে প্রারম্ভিক বেগ ছিল না এবং ইহা g সমত্বরণ লইয়া চলিতেছে

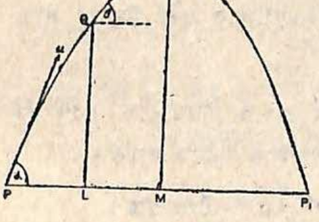
$$\therefore \quad y=\tfrac{1}{2}gt^2.$$

এখন, $\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{u^2t^2}{\frac{1}{2}gt^2}=\dfrac{2u^2}{g}.$

$$x^2=\frac{2u^2}{g}\,y. \quad \text{অর্থাৎ} \quad \frac{PN^2}{AN}=\frac{2u^2}{g}\ (\text{ধ্রুবক})$$

অতএব P বিন্দু একটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত অর্থাৎ প্রাসের গতিপথ একটি অধিবৃত্ত।

7·8. একটি কণাকে u বেগে অনুভূমিক তলের সহিত α কোণে প্রক্ষেপ করা হইয়াছে। t সময় পরে তাহার বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় করিতে হইবে।



মনে কর, t সময় পরে বেগ v এবং ইহা অনুভূমিক দিকের সঙ্গে θ কোণ করে। তাহা হইলে

$v\cos\theta = t$ সময় পরে অনুভূমিক দিকের বেগ

$$=u\cos\alpha\cdots\cdots(1),$$

(কারণ, অনুভূমিক দিকে বেগের পরিবর্তন নাই)

$v\sin\theta = t$ সময় পরে উল্লম্ব দিকে বেগ

$$=u\sin\alpha - gt\cdots\cdots(2)$$

সমীকরণ (1) এবং (2) বর্গ করিয়া যোগ করিলে পাই

$$v^2 = u^2 - 2ugt \sin \alpha + g^2t^2 \cdots\cdots (3)$$

ভাগ করিয়া পাই

$$\tan \theta = \frac{u \sin \alpha - gt}{u \cos \alpha} \cdots\cdots (4)$$

(3) এবং (4) বেগের মান ও দিক্ নির্ণয়ের সূত্র।

2-7. একটি কণাকে u বেগে অনুভূমিক তলের সহিত α কোণে প্রক্ষেপ করা হইয়াছে। h উচ্চতায় তাহার বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, h উচ্চতায় বেগ v এবং ইহা অনুভূমিক দিকের সঙ্গে θ কোণ করে। তাহা হইলে অনুভূমিক এবং উল্লম্বদিকে বেগ $v \cos \theta$ এবং $v \sin \theta$.

অতএব, $$v \cos \theta = u \cos \alpha \cdots\cdots (1)$$

কারণ, অনুভূমিক দিকে বেগের পরিবর্তন নাই।

$$v \sin \theta = \sqrt{u^2 \sin^2 \alpha - 2gh} \cdots\cdots (2)$$

সমীকরণ (1) এবং (2) বর্গ করিয়া যোগ করিলে পাই

$$v^2 = u^2 - 2gh \cdots\cdots (3)$$

ভাগ করিয়া পাই

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{u^2 \sin^2 \alpha - 2gh}}{u \cos \alpha} \cdots\cdots (4)$$

(3) এবং (4) বেগের মান ও দিক্ নির্ণয়ের সূত্র।

7-10. চরম উচ্চতা এবং এই উচ্চতা লাভের সময় নির্ণয়।

মনে কর, চরম উচ্চতা H এবং T সময় পরে এই উচ্চতা লাভ হয়। এখানে আমরা উল্লম্বগতি বিবেচনা করি।

প্রক্ষিপ্ত কণা যখন চরম উচ্চতায়, তখন তাহার উল্লম্বদিকে সরণ H এবং উল্লম্বদিকে বেগ 0 (শূন্য), অন্যথা ইহা উপরদিকে উঠিতে থাকিত।

$$\therefore \quad 0 = u^2 \sin^2 \alpha - 2gH \qquad (v^2 = u^2 + 2fs \text{ সূত্র})$$

$$H = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \cdots\cdots (1)$$

আবার যেহেতু T সময় পরে উল্লম্ব বেগ 0 (শূন্য)

$$\therefore \quad 0 = u \sin \alpha - gT$$

$$T = \frac{u \sin \alpha}{g} \cdots\cdots (2)$$

(1) এবং (2) চরম উচ্চতা এবং ঐ উচ্চতা লাভের সময়ের জন্য সূত্র।

7-11. উত্থিতি কাল এবং অনুভূমিক তলে প্রক্ষেপ-সীমা নির্ণয়।

প্রক্ষিপ্ত কণা যখন প্রক্ষেপ-বিন্দু-গামী অনুভূমিক তলে ফিরিয়া আসে, তখন উল্লম্বদিকে সরণ 0 (শূন্য)। উল্লম্ব গতি বিবেচনা করিয়া

$$0 = u \sin \alpha . t - \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad (s = ut + \tfrac{1}{2} f t^2 \text{ সূত্র})$$

$$= t \, (u \sin \alpha - \tfrac{1}{2} g t)$$

ইহা হইতে $t = \dfrac{2u \sin \alpha}{g}$.

অতএব, **উত্থিতি কাল** $= \dfrac{2u \sin \alpha}{g}$.

[লক্ষ্য কর :—উত্থিতি কাল চরম উচ্চতা লাভের সময়ের দ্বিগুণ।]

এখন, নির্ণেয় **প্রক্ষেপ-সীমা** $= \dfrac{2u \sin \alpha}{g}$ সময়ে অনুভূমিক দিকে সরণ

$$\therefore \quad R \text{ (প্রক্ষেপ-সীমা) } = u \cos \alpha \times \frac{2u \sin \alpha}{g}$$

$$= \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$$

7-12. অনুভূমিক প্রক্ষেপ-সীমার বৃহত্তম মান (Greatest Horizontal Range)।

প্রক্ষেপ-সীমা $R = \dfrac{u^2 \sin 2\alpha}{g}$.

এখানে বেগ u প্রদত্ত এবং g ধ্রুবক (constant)। অতএব R বৃহত্তম হইতে হইলে $\sin 2\alpha$ বৃহত্তম, অর্থাৎ $\sin 2\alpha = 1$ হইবে।

$\therefore$ বৃহত্তম প্রক্ষেপ-সীমা $= \dfrac{u^2}{g}$.

আবার যখন $\sin 2\alpha = 1$, তখন $2\alpha = 90°$ এবং $\alpha = 45°$.

সুতরাং প্রক্ষেপ-কোণ 45° হইলে প্রক্ষেপ-সীমা বৃহত্তম হয়।

7·13. যে কোন অনুভূমিক প্রক্ষেপ-সীমার জন্য দুইটি প্রক্ষেপ-কোণ আছে এবং ইহারা বৃহত্তম প্রক্ষেপ-সীমার প্রক্ষেপ-কোণের সহিত দুইদিকে সমান নতিতে থাকে।

$$\text{অনুভূমিক প্রক্ষেপ-সীমা} = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

$$= \frac{u^2}{g} \sin (180° - 2\alpha)$$

$$= \frac{u^2}{g} \sin 2 (90° - \alpha).$$

∴ দেখা যাইতেছে $(90° - \alpha)$ কোণে প্রক্ষেপ করিলে অনুভূমিক প্রক্ষেপ-সীমা, α কোণে প্রক্ষেপ-সীমার সমান।

আবার, $90° - \alpha - 45° = 45° - \alpha$.

∴ $90° - \alpha$ এবং α উভয়ে $45°$ কোণের সঙ্গে দুইদিকে সমান নতিতে আছে।

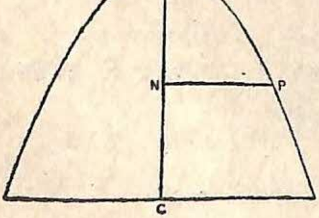
7·14. শূন্যে (বায়ুর বাধা নাই মনে করিলে) প্রাসের গতিপথ একটি অধিবৃত্ত (The path of a projectile in vacuo is a parabola)।

মনে কর, u প্রারম্ভিক বেগ দিয়া একটি কণাকে অনুভূমিক তলের সহিত α কোণে প্রক্ষেপ করা হইয়াছে। তাহা হইলে

অনুভূমিক দিকে প্রারম্ভিক বেগ $= u \cos \alpha$

এবং উল্লম্বদিকে প্রারম্ভিক বেগ $= u \sin \alpha$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, প্রাসের গতিপথ একটি অধিবৃত্ত।



মনে কর, A গতিপথের সর্বোচ্চ বিন্দু এবং এই অবস্থানে আসিবার t সময় পরে (বা t সময় আগে) কণার অবস্থান P.

P বিন্দু হইতে AC উল্লম্ব রেখার উপর PN লম্ব অঙ্কিত কর। তাহা হইলে t সময়ে কণার অনুভূমিক সরণ $x = PN$ এবং উল্লম্ব সরণ $y = AN$,

এখন, $x = u \cos \alpha . t$.

কারণ, অনুভূমিক দিকে বেগের কোন পরিবর্তন নাই।

এবং $y=\frac{1}{2}gt^2$ ($\because$ A বিন্দুতে কণার উল্লম্ব বেগ শূন্য)

$$\therefore \quad \frac{x^2}{y}=\frac{u^2t^2\cos^2\alpha}{\frac{1}{2}gt^2}=\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}.$$

$$x^2=\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}y \qquad \left(\frac{PN^2}{AN}=\text{ধ্রুবক}\right)$$

সুতরাং প্রাসের গতিপথ অধিবৃত্ত।

দ্রষ্টব্য : এই অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু (Vertex) A, অক্ষ (Axis) উল্লম্ব নিম্নাভিমুখে এবং নাভিলম্ব (latus rectum) $\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}$.

7-15. উদাহরণ :

1. একটি বস্তুকে 64 ফুট উচ্চ মিনারের চূড়া হইতে সেকেণ্ডে 72 ফুট বেগে অনুভূমিক দিকে প্রক্ষেপ করা হইলে,

(i) ভূতলে পৌঁছিতে কত সময় লাগে ?

(ii) ইহা মিনারের পাদদেশ হইতে কতদূরে ভূতলে পড়িবে ?

(iii) ভূতলে পড়িবার সময়ে বেগ নির্ণয় কর।

(i) উল্লম্বদিকে প্রারম্ভিক বেগ 0 (শূন্য), বস্তু যখন ভূতলে আসে তখন উল্লম্বদিকে সরণ 64 ফুট।

উল্লম্বদিকে গতি বিবেচনা করিয়া

$$64=\frac{1}{2}gt^2=16t^2, \quad \text{অর্থাৎ}, \quad t^2=4\,; \quad \therefore \; t=2 \text{ সেকেণ্ড।}$$

(ii) মিনারের পাদদেশ হইতে দূরত্ব $=2$ সেকেণ্ডে অনুভূমিক দিকে সরণ
$=2\times 64=128$ ফুট।

(iii) ভূতলে পড়িবার সময় অনুভূমিক দিকে বেগ $u=72$ ফুট/সেকেণ্ড
[কারণ, অনুভূমিক বেগের কোন পরিবর্তন নাই।]

উল্লম্বদিকে বেগ $v=gt=32\times 2=64$ ফু./সে.

$$\therefore \text{ লব্ধি বেগ} =\sqrt{u^2+v^2} = \sqrt{72^2+64^2} = 8\sqrt{9^2+8^2} = 8\times 12\cdot04=96\cdot32 \text{ ফু./সে.}$$

2. একটি বস্তু সেকেণ্ডে 200 ফুট বেগে অনুভূমিক তলের সঙ্গে α কোণে প্রক্ষিপ্ত হইল। যদি $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ হয় তাহা হইলে (i) বলটি কত উচ্চতা লাভ করিতে পারে ? (ii) উত্থিতিকাল এবং প্রক্ষেপ-সীমা নির্ণয় কর। (iii) 200 ফুট উচ্চে বেগের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

প্রারম্ভিক অনুভূমিক বেগ $= 200 \cos \alpha$

$= 200 \times \frac{4}{5}$ [কারণ, $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

$= 160$ ফু./সে. ; $= \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$.]

প্রারম্ভিক উল্লম্ব বেগ $= 200 \sin \alpha$

$= 200 \times \frac{3}{5} = 120$ ফু./সে.।

(i) মনে কর, চরম উচ্চতা H.

H উচ্চতায় উল্লম্ব বেগ $= 0$,

উল্লম্বদিকে প্রারম্ভিক বেগ $= 120$ ফু./সে., এবং ত্বরণ $= -g$.

উল্লম্বগতি বিবেচনা করিয়া $0 = 120^2 - 2 \times 32. H$

$H = \dfrac{120 \times 120}{64} = 225$ ফুট।

(ii) মনে কর, t উত্থিতিকাল ; তাহা হইলে এই সময়ে উল্লম্বদিকে সরণ $= 0$,

প্রারম্ভিক উল্লম্ববেগ $= 120$ ফু./সে., ত্বরণ $= -g$

$\therefore \quad 0 = 120t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \therefore \quad t = \dfrac{\overset{15}{\cancel{240}}}{\underset{2}{\cancel{32}}} = 7\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড।

অনুভূমিক প্রক্ষেপ-সীমা $= 160 \times 7\frac{1}{2} = 160 \times \dfrac{15}{2} = 1200$ ফুট।

(iii) যদি 200 ফুট উচ্চতায় বেগ v অনুভূমিক তলের সহিত θ কোণে থাকে তাহা হইলে

$v \sin \theta = \sqrt{120^2 - 2g.200}$

$= \sqrt{120^2 - 64 \times 200}$

$= 8\sqrt{15^2 - 200} = 8 \times 5 = 40$ ফু./সে. ; ...(i)

$v \cos \theta = 160$ ফু./সে.। ... ...(ii)

(i) এবং (ii)-এর বর্গ করিয়া যোগ করিলে

$v^2 = 40^2 + 160^2$,

$\therefore \quad v^2 = 40\sqrt{1 + 4^2} = 40\sqrt{17} = 40 \times 4{\cdot}123 = 164{\cdot}92$ ফু./সেকেণ্ড।

$\therefore \quad \tan \theta = \dfrac{40}{160} = \dfrac{1}{4}.$

ট্যানজেণ্ট-এর সারণী আলোচনা করিয়া দেখা যায় $\theta = 14°6'$ (প্রায়)।

3. একটি টেনিস বল 6·25 ফুট উচ্চতা হইতে অনুভূমিক দিকে প্রক্ষেপ করা হয়। ইহা 60 ফুট দূরে গিয়া মাটিতে পড়ে এবং 40 ফুট দূরে জাল স্পর্শ করিয়া যায়। জালের উচ্চতা নির্ণয় কর।

মনে কর, বলের প্রারম্ভিক অনুভূমিক বেগ u এবং t সময়ে ইহা মাটিতে পৌঁছে, তাহা হইলে t সময়ে বলের উল্লম্ব সরণ = 6·25 ফুট

$\therefore \quad 6{\cdot}25 = \frac{1}{2}gt^2$

অর্থাৎ, $\frac{25}{4} = 16t^2 \quad \therefore \quad t = \frac{5}{8}$ সেকেণ্ড

আবার, এই সময়ে অনুভূমিক দিকে সরণ = 60 ফুট

$\therefore \quad 60 = u \times \frac{5}{8} \quad \therefore \quad u = 96$ ফু./সে.

জালের অনুভূমিক দূরত্ব 40 ফুট যাইতে যদি টেনিস বলের T সময় লাগে, তাহা হইলে

$40 = 96\,T. \quad \therefore \quad T = \frac{40}{96} = \frac{5}{12}$ সে.

এই সময়ে উল্লম্বদিকে সরণ $\frac{1}{2}g\left(\frac{5}{12}\right)^2 = 16 \times \frac{25}{144} = \frac{25}{9}$ ফুট।

জালের উচ্চতা $= 6\frac{1}{4} - \frac{25}{9} = \frac{25}{4} - \frac{25}{9} = 25 \times \frac{5}{36}$ ফুট

$= 3\frac{17}{36}$ ফুট = 3 ফু. $5\frac{2}{3}$ ইঞ্চি।

4. একজন লোক যদি সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে একটি কন্দুক ছুঁড়ে, অনুভূমিক দিকে ইহার বৃহত্তম প্রক্ষেপ-সীমা কত? যদি কন্দুকটি 100 ফুট দূরে গিয়া পড়ে তাহা হইলে প্রক্ষেপ-কোণ কত?

$$\text{প্রক্ষেপ-সীমা} = \frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{80^2 \sin 2\alpha}{32}$$

যখন $\sin 2\alpha$ বৃহত্তম, অর্থাৎ 1, তখন প্রক্ষেপ-সীমা বৃহত্তম।

$$\therefore \quad \text{বৃহত্তম প্রক্ষেপ-সীমা} = \frac{80 \times 80}{32} = 200 \text{ ফুট।}$$

প্রক্ষেপ-সীমা যখন 100 ফুট, তখন

$$100 = \frac{80 \times 80}{32} \sin 2\alpha = 200 \sin 2\alpha.$$

$\therefore \quad \sin 2\alpha = \frac{1}{2},\ 2\alpha = 30^\circ$ অথবা 150°

$\therefore \quad \alpha = 15^\circ$ অথবা 75°

5. 160 ফুট উচ্চ একটি স্তম্ভের শীর্ষ হইতে একটি ঢিল অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণে সেকেণ্ডে 96 ফুট বেগে প্রক্ষেপ করা হইলে ইহা কতদূরে গিয়া ভূপতিত হইবে?

ঢিলের প্রারম্ভিক অনুভূমিক বেগ $= 96 \cos 30^\circ = 96 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}$ ফু./সে.

প্রারম্ভিক উল্লম্ব বেগ $= 96 \sin 30° = 96 \times \frac{1}{2} = 48$ ফু./সে.

মনে কর, t সময় পরে ইহা ভূপতিত হয়,

এখন, উল্লম্বদিকে প্রারম্ভিক বেগ $= 48$ ফু./সে., সরণ $= -160$ ফুট, ত্বরণ $= -g$.

$$\therefore \quad -160 = 48t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

$$-160 = 48t - 16t^2$$

অর্থাৎ, $t^2 - 3t - 10 = 0$

$(t-5)(t+2) = 0 \quad \therefore \ t = 5$ সেকেণ্ড ; (অপরমান $t = -2$ গ্রাহ্য নহে)

এই সময়ে অনুভূমিক দিকে বেগের কোন পরিবর্তন হয় নাই,

ঢিল যদি স্তম্ভের পাদদেশ হইতে x দূরত্বে পড়ে তাহা হইলে,

$x = 5$ সেকেণ্ডে অনুভূমিক দিকে সরণ

$= 48\sqrt{3} \times 5$ ফুট $= 240\sqrt{3}$ ফুট $= 416$ ফুট (প্রায়)।

*6 (i) একটি কণাকে u বেগে শূন্যে প্রক্ষেপ করিলে অনুভূমিক সমতলে তাহার প্রক্ষেপ সীমা R ; দেখাও যে উড্ডিতিকাল T এবং চরম উচ্চতা নিম্নলিখিত সমীকরণদ্বয় হইতে পাওয়া যায়—

$$g^2T^4 - 4T^2u^2 + 4R^2 = 0$$

এবং $16gH^2 - 8Hu^2 + 4R^2 = 0$

আমরা জানি, $T = \dfrac{2u \sin \alpha}{g} \cdots (1) \quad H = \dfrac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} \cdots (2)$

যেহেতু $R = \dfrac{u^2}{g} \sin 2\alpha = \dfrac{2u^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$

$$\therefore \quad R^2 = \frac{4u^4}{g^2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{4u^4}{g^2} \times \frac{g^2T^2}{4u^2}\left(1 - \frac{g^2T^2}{4u^2}\right) \cdots (1) \text{ হইতে}$$

$$= \tfrac{1}{4}T^2(4u^2 - g^2T^2)$$

or, $g^2T^4 - 4T^2u^2 + 4R^2 = 0$ ......(I)

আবার $R^2 = \dfrac{4u^4}{g^2} \cdot \dfrac{2gH}{u^2}\left(1 - \dfrac{2gH}{u^2}\right) = \dfrac{8H}{g}(u^2 - 2gH)$. (2) হইতে

$\therefore \quad 16gH^2 - 8Hu^2 + gR^2 = 0$ ......(II)

(ii) যদি কোনও প্রদত্ত প্রক্ষেপ সীমা R-এর জন্য T_1 এবং T_2 দুইটি উড্ডিতিকাল হয় এবং H_1, H_2 চরম উচ্চতা হয় তাহা হইলে দেখাও যে

$$R = \tfrac{1}{2}gT_1T_2 = 4\sqrt{H_1H_2}.$$

উপরে লব্ধ (I) সমীকরণের দুইটি বীজ যদি T_1^2 এবং T_2^2 হয়, তাহা হইলে

$$T_1^2T_2^2 = \frac{4R^2}{g^2} \text{ ইহা হইতে } R = \tfrac{1}{2}gT_1T_2$$

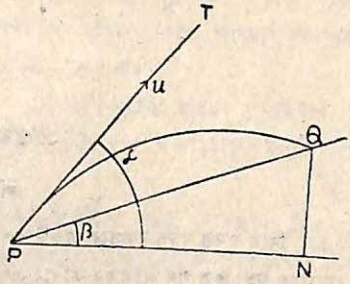
সমীকরণ (II) হইতে

$$H_1H_2 = \tfrac{1}{16}R^2 \text{ ; ইহা হইতে } R = 4\sqrt{H_1H_2}.$$

7-16. নততলে প্রক্ষেপ সীমা (Range on an inclined plane) **:**

অনুভূমিক তলের সহিত α কোণ করিয়া u বেগে একটি কণা এক নততলের প্রদত্ত একটি বিন্দু হইতে প্রক্ষিপ্ত হইয়াছে। নততলের নতি β হইলে এই তলে প্রক্ষেপ সীমা নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, নততলে প্রক্ষেপ-সীমা PQ ; P-এর ভিতর দিয়া অনুভূমিক তলের উপর QN লম্ব টানা হইয়াছে।



ধর, P হইতে Q-তে যাইতে কণার T সময় লাগে। এই সময়ে নততলের লম্বাভিমুখে সরণ 0 (শূন্য)।

এখন আমরা নততলের লম্বাভিমুখে গতি বিবেচনা করিব। এই দিকে বেগের বিশ্লেষিতাংশ $u \sin(\alpha-\beta)$ এবং g-এর বিশ্লেষিতাংশ $-g \cos\beta$

$$\therefore \quad 0 = u\sin(\alpha-\beta).T - \tfrac{1}{2}g\cos\beta.T^2,$$

ইহা হইতে $T = \dfrac{2u}{g} \times \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}$.

আবার প্রক্ষেপ-সীমা $PQ = \dfrac{PN}{\cos\beta}$, কিন্তু $PN = T$ সময়ে কণার অনুভূমিক দিকে সরণ,

$$\therefore \quad PN = u\cos\alpha.T$$

এবং প্রক্ষেপ-সীমা $PQ = \dfrac{PN}{\cos\beta} = \dfrac{u\cos\alpha.T}{\cos\beta} = \dfrac{2u^2}{g}.\dfrac{\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\beta}$.

$$\text{প্রক্ষেপ-সীমা} = \frac{u^2}{g\cos^2\beta}\{\sin(2\alpha-\beta) - \sin\beta\}$$

যখন $\sin(2\alpha-\beta)$ বৃহত্তম, অর্থাৎ 1, তখন ইহা বৃহত্তম হইবে।

$$\therefore \quad \textbf{বৃহত্তম প্রক্ষেপ-সীমা} = \frac{u^2}{g\cos^2\beta}(1-\sin\beta)\ .$$

$$= \frac{u^2(1-\sin\beta)}{g(1-\sin^2\beta)} = \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)}.$$

মন্তব্য : প্রক্ষেপসীমা বৃহত্তম হইলে $2\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad \alpha - \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

অতএব প্রক্ষেপের দিক্ নততলের সঙ্গে এবং উল্লম্বদিকের সঙ্গে সমান কোণ করে। অর্থাৎ প্রক্ষেপের দিক্ নততল ও উল্লম্বদিকের অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[**লক্ষ্য কর ঃ** উপরে লব্ধ প্রক্ষেপ সীমাতে $\beta=0$ করিলে, অনুভূমিক তলে প্রক্ষেপ সীমা $\frac{u^2}{g}\sin 2\alpha$ পাওয়া যায়।

প্রশ্নমালা 7A

নততল

1. নিম্নে প্রদত্ত মসৃণ নততলে একটি কণা যদি স্থিরাবস্থা হইতে পিছলাইয়া যায় তাহা হইলে 1 সেকেণ্ডে উহা কত পথ অতিক্রম করিবে এবং 1 সেকেণ্ড পরে তাহার বেগ কত হইবে ?

(i) তলের নতি 16তে 1,

(ii) তলের নতি 8তে 5,

(iii) তলের নতি 20তে 3,

2. নিম্নে প্রদত্ত মসৃণ নততলে স্থিরাবস্থা হইতে পিছলাইয়া পড়িলে একটি কণার 4 সেকেণ্ডে সরণ এবং এই সময় পরে বেগ নির্ণয় কর :

(i) নততলের উচ্চতা : দৈর্ঘ্য = 9 : 16

(ii) নততলের ভূমি : দৈর্ঘ্য = 4 : 5

(iii) নততলের উচ্চতা : ভূমি = 3 : 4

3. একটি কণা 30° নতিবিশিষ্ট তলের উপর 2 সেকেণ্ড পিছলাইয়া পড়িলে তাহার বেগ কত হইবে ? উহা কতদূর যাইবে ?

4. 20 ফুট দৈর্ঘ্য ও 16 ফুট উচ্চতাবিশিষ্ট একটি মসৃণ নততলের শীর্ষদেশে স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া পিছলাইয়া ভূতলে পৌঁছিতে একটি কণার কত সময় লাগে ? ভূতলে পৌঁছিলে বেগ কত হইবে ?

5. একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া 30° নতিবিশিষ্ট মসৃণ নততলের উপর তৃতীয় সেকেণ্ডে কতদূর পিছলাইয়া যাইবে ?

6. একটি বল সেকেণ্ডে 40 ফুট বেগে 30° নতিবিশিষ্ট নততলে উপর দিকে ছুঁড়িয়া দিলে ইহা কতদূর পৌঁছিবে ?

7. একটি নততলের নতি 5-তে 4 ; সেকেণ্ডে 32 ফুট বেগে তলের উপর একটি গোলক উপর দিকে ছুঁড়িয়া দিলে ইহা কতদূর পর্যন্ত যাইবে ? যদি ইহা আবার পিছলাইয়া পড়ে প্রক্ষেপস্থলে ফিরিয়া আসিতে কত সময় লাগিবে ?

8. একটি কণা 25 ফুট লম্বা এবং 16 ফুট উঁচু নততলের শীর্ষদেশ হইতে পিছলাইয়া পড়িলে যখন ভূমিতে পৌছিবে তখন তাহার বেগ কত ? কত সময়ে এখানে আসিবে ?

9. একটি নততলের দৈর্ঘ্য 288 ফুট এবং উচ্চতা 64 ফুট। ইহাকে এমন তিন ভাগে ভাগ কর যেন শীর্ষদেশ হইতে যাত্রা করিয়া একটি কণা এই তিন অংশ সমান সময়ে অতিক্রম করে এবং এই সময় নির্ণয় কর।

10. একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে এক 18 ফুট দীর্ঘ মসৃণ নততলে গড়াইয়া পড়িলে তলের পাদদেশে পৌছিয়া সেকেণ্ডে 24 ফুট বেগ অর্জন করে ; তলের নতি নির্ণয় কর। [উ. মা. 1960]

11. স্থিরাবস্থা হইতে এক মসৃণ নততলে পিছলাইয়া পড়িবার কাল পরিমাণ অবাধভাবে তলের উচ্চতার দ্বিগুণ পতনকালের সমান। তলের নতি নির্ণয় কর।

12. একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে একটি মসৃণ নততলে গড়াইয়া ভূতলে পৌছিবার কাল পরিমাণ অবাধ ভাবে নততলের উচ্চতার সমান পথ পড়িবার কাল পরিমাণের দ্বিগুণ ; তলের নতি নির্ণয় কর।

13. একটি উল্লম্ব বৃত্তের অনুভূমিক ব্যাসের এক প্রান্ত হইতে বৃত্তের যে কোন বিন্দু পর্যন্ত একটি জ্যা অঙ্কিত হইয়াছে। দেখাও যে ঐ জ্যা বরাবর স্থিরাবস্থা হইতে পিছলাইয়া পড়িবার কাল পরিমাণ জ্যাটির উল্লম্বের সঙ্গে নত কোণের ট্যানজেন্টের বর্গমূলের অনুপাতে।

14. প্রদত্ত ভূমির একটি মসৃণ নততলের শীর্ষ হইতে একটি কণা স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করে। দেখাও যে যখন তলের নতি অনুভূমিকের সঙ্গে 45° তখন পতনকাল ন্যূনতম।

[সংকেত : ধর, b প্রদত্ত ভূমি এবং নততলের নতি $\theta°$, তাহা হইলে নততলের দৈর্ঘ্য $l = b \sec\theta$.

এখন $b \sec\theta = \frac{1}{2} g \sin\theta . t^2 \quad \therefore \quad t^2 = \dfrac{2b}{g \sin\theta \cos\theta} = \dfrac{4b}{g \sin 2\theta}$

$\therefore$ t ন্যূনতম হইলে $\sin 2\theta$ বৃহত্তম অর্থাৎ 1, তখন $2\theta = 90°$]

প্রশ্নমালা 7(B)

প্রাস

1. একটি গুলি 16 ফুট উচ্চতা হইতে অনুভূমিক দিকে ছোঁড়া হইল এবং ইহা 500 ফুট অনুভূমিক দূরত্বে গিয়া ভূতলে পতিত হইল। প্রারম্ভিক বেগ নির্ণয় কর।

2. $u = 120$ ফু./সে. এবং $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ হইলে সর্বাধিক উচ্চতা, উড্ডয়নকাল এবং অনুভূমিক তলে প্রক্ষেপ-সীমা নির্ণয় কর।

3. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে অনুভূমিক তলে সর্বাধিক প্রক্ষেপ সীমা নির্ণয় কর ;

(i) প্রক্ষেপ-বেগ যখন 64 ফু./সে. ;

(ii) প্রক্ষেপ-বেগ যখন 72 ফু./সে. ;

(iii) প্রক্ষেপ-বেগ যখন 90 ফু./সে.।

4. একটি বালক উল্লম্বদিকে ঢিল ছুঁড়িয়া 50 ফুট উচ্চে উঠাইতে পারে। একটি ঢিল ছুঁড়িয়া সে অনুভূমিক দিকে সর্বাধিক কতদূর নিতে পারিবে ?

5. অনুভূমিক তলের সহিত 60° কোণে একটি বস্তুকে সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে প্রক্ষেপ করা হইল

(1) ইহা সর্বাধিক কত উচ্চতায় যাইতে পারে ?

(2) অনুভূমিক প্রক্ষেপ-সীমা এবং উত্থিতিকাল নির্ণয় কর।

(3) 64 ফুট উচ্চে ইহার বেগের মান কত ?

6. সেকেণ্ডে 256 ফুট বেগে অনুভূমিক দিকে ধাবমান এরোপ্লেন হইতে একটি বোমা ফেলা হইল। ইহা 6 সেকেণ্ড পরে মাটিতে পৌঁছিলে এরোপ্লেন কত উঁচুতে ছিল নির্ণয় কর এবং মাটিতে পড়িবার সময় বোমার বেগ নির্ণয় কর।

7. একটি প্রাস 4 সেকেণ্ড পরে প্রক্ষেপ-বিন্দুর অনুভূমিক তলে ফিরিয়া আসে এবং প্রক্ষেপ-বিন্দু হইতে 64 গজ দূরে পতিত হয়। প্রক্ষেপ-বেগ নির্ণয় কর।

8. দুইটি ঢিল একই বিন্দু হইতে অনুভূমিক তলের সহিত 60° এবং 30° নতিতে প্রক্ষেপ করা হয়। যদি উভয়ে সমান উচ্চতায় পৌঁছে তাহা হইলে তাহাদের প্রক্ষেপ বেগের অনুপাত নির্ণয় কর।

9. একটি গুলি 100 ফুট দূরে অবস্থিত 50 ফুট উঁচু একটি প্রাচীরের শীর্ষ ঘেঁষিয়া যাইবার সময়ে যদি তাহার অনুভূমিক গতি হয়, তাহা হইলে গুলির প্রক্ষেপ-বেগের দিক্ ও মান নির্ণয় কর।

10. একটি গুলি 45° নতিতে ছুঁড়িলে 100 মিটার উচ্চতা লাভ করে। প্রক্ষেপ-বেগ নির্ণয় কর।

11. একটি পাহাড়ের চূড়া হইতে অনুভূমিক দিকে সেকেণ্ডে 64 ফুট বেগে একটি ঢিল ছোঁড়া হয়, ইহা পাহাড়ের পাদদেশে (প্রক্ষেপ-বিন্দুর ভিতর দিয়া উল্লম্ব রেখা) হইতে 320 ফুট দূরে গিয়া ভূমিতে পড়ে। পাহাড়ের উচ্চতা নির্ণয় কর।

12. 625 ফুট উচ্চ পাহাড়ের উপর হইতে অনুভূমিক তলের সহিত 60° নতিতে একটি গোলা সেকেণ্ডে 400 ফুট বেগে ছুঁড়িলে ইহা কামানের মুখের ভিতর দিয়া উল্লম্ব রেখা হইতে কত অনুভূমিক দূরত্বে গিয়া পড়িবে ?

13. একজন শিকারী 200 ফুট দূরে অবস্থিত 50 ফুট উচ্চে বৃক্ষের মাথায় উপবিষ্ট পাখীর প্রতি শর সন্ধান করে। যদি প্রক্ষেপ কোণের ট্যান্‌জেন্ট $\frac{1}{2}$ হয়, প্রক্ষেপ বেগ নির্ণয় কর।

14. একজন বৈমানিক অনুভূমিক দিকে ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে চলিবার সময়ে 2000 ফুট উঁচু হইতে একটি বোমা ফেলে। লক্ষ্য বস্তু হইতে তাহার অনুভূমিক দূরত্ব কত হইলে বোমাটি লক্ষ্যে গিয়া পড়িবে ?

15. একটি ক্রিকেট বল 6 ফুট উঁচু হইতে অনুভূমিক তলের সঙ্গে 30° নতিতে সেকেণ্ডে 60 ফুট বেগে ছোঁড়া হইল। একজন খেলোয়াড় ইহাকে মাটি হইতে 2 ফুট উপরে ধরিল। দুইজন খেলোয়াড় কত ব্যবধানে ছিল ?

16. 272 ফুট উচ্চ মিনারের শীর্ষদেশ হইতে একটি গুলি ছোঁড়া হয়। 17 সেকেণ্ড পরে ইহা মিনারের পাদদেশ হইতে 4352 ফুট দূরে ভূমিতে আসিয়া পড়ে। প্রক্ষেপ-কোণ নির্ণয় কর।

31. একটি ঢিল সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে 45° নতিতে প্রক্ষেপ করা হয়। একই বিন্দু হইতে কত বেগে আর একটি ঢিল উল্লম্বদিকে প্রক্ষেপ করিলে উভয় ঢিল সমান উচ্চতা লাভ করিতে পারে ?

32. প্রাসের অনুভূমিক প্রক্ষেপসীমা R এবং উড্ডিতিকাল T হইলে, দেখাও যে ইহার প্রক্ষেপ কোণ α নিম্নসম্বন্ধ হইতে পাওয়া যায় $2R \tan \alpha = gT^2$

33. যদি একটি প্রাসের অনুভূমিক প্রক্ষেপ-সীমা R হয় এবং চরম উচ্চতা H হয়, প্রমাণ কর যে, (i) প্রক্ষেপ কোণ α হইলে $\tan \alpha = \frac{4H}{R}$,

(ii) একই প্রক্ষেপবেগে বৃহত্তম প্রক্ষেপ সীমা $2H + \frac{1}{8} \times \frac{R^2}{H}$.

34. যদি একটি প্রাস প্রক্ষেপের t সময় পরে P বিন্দুতে পৌঁছে এবং P বিন্দু হইতে প্রক্ষেপ বিন্দুর ভিতর দিয়া অনুভূমিক তলে আসিয়া পৌঁছতে t' সময় লাগে তবে দেখাও যে তল হইতে P বিন্দুর উচ্চতা $\frac{1}{2}gtt'$.

সঙ্কেত : $h = ut \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 \cdots\cdots(1)$

যেহেতু উড্ডিতিকাল $t+t'$

$\therefore \quad 0 = u \sin \alpha . (t+t') - \frac{1}{2}g(t+t')^2 \cdots\cdots(2)$

(2) হইতে $u \sin \alpha = \frac{1}{2}g(t+t')$। এখন (1) সমীকরণে $u \sin \alpha$-র মান স্থাপন করিয়া সরল করিলে নির্ণেয় ফল মিলিবে।

অষ্টম পরিচ্ছেদ | গতিবিদ্যা Kinetics

8-1. সংজ্ঞার আলোচনা :

জড়, বস্তু, কণা, বেগ, ভর, বল, ভার—ইহাদের সংজ্ঞা সূচনাতেই দেওয়া হইয়াছে। এখন এই সংজ্ঞাগুলি স্মরণ করিতে হইবে।

ভরবেগ (Momentum) : কোন বস্তুর ভর ও বেগের গুণফলকে ঐ বস্তুর ভরবেগ বলে।

যদি বস্তুর ভর m হয় এবং বেগ v হয়, তাহা হইলে

$$\text{ভরবেগ} = mv$$

যেহেতু বেগের দিক্ আছে, অতএব, ভরবেগেরও দিক্ আছে, ভরবেগের দিক্ বেগের দিকে।

ভরবেগের একক (Units of momentum) : একক ভরের বস্তু একক বেগ লইয়া চলিলে তাহার ভরবেগকে ভরবেগের একক ধরা হয়।

এফ্. পি. এস্. প্রদ্ধতিতে এক পাউণ্ড ভরের কোন বস্তু সেকেণ্ডে এক ফুট বেগে চলিলে তাহার ভরবেগ, ভরবেগের একক। ইহাকে 1 পা. ফু./সে. লেখা যায়।

সি. জি. এস্. পদ্ধতিতেও একই প্রকার।

8-2. উদাহরণ :

1. 4 আউন্স ভরের একটি গুলি সেকেণ্ডে 1000 ফুট বেগে চলিলে তাহার ভরবেগ কত ?

$$4 \text{ আউন্স} = \tfrac{4}{16} = \tfrac{1}{4} \text{ পাউণ্ড।}$$

এখন, ভরবেগ $= \frac{1}{4} \times 1000 = 250$ এফ্. পি. এস্. একক।

2. 10 কিলোগ্রাম ভরের একটি কামানের গোলা সেকেণ্ডে 450 মিটার বেগে ছুটিলে উহার ভরবেগ কত ?

10 কিলোগ্রাম $= 10 \times 1000 = 10{,}000$ গ্রাম

450 মিটার $= 450 \times 100 = 45{,}000$ সেন্টিমিটার

এখন, ভরবেগ $= 10{,}000 \times 45{,}000$

$= 450{,}000{,}000$ সি. জি. এস্. একক।

3. (i) 2 পাউণ্ড ভরের বস্তু 2 সেকেণ্ড পড়িবার পর কত ভরবেগ লাভ করে ?

(ii) 200 গ্রাম ভরের বস্তু 10 মিটার পড়িবার পর কত ভরবেগ লাভ করে ?

(i) 2 সেকেণ্ড পতনজনিত বেগ $=32\times 2$ $[v=gt]$

$=64$ ফু./সে.

$\therefore$ উৎপাদিত ভরবেগ $=2\times 64=128$ ফু. পা./সে. একক

(ii) 10 মিটার $=1000$ সেন্টিমিটার

1000 সে. মি. পতনজনিত বেগ $=\sqrt{2\times 980\times 1000}$ $[v=\sqrt{2gh}]$

$=1400$ সে. মি./সে.

$\therefore$ উৎপাদিত ভরবেগ $=200\times 1400$

$=280{,}000$ সি. জি. এস্. একক।

8-3. পূর্বে আমরা বস্তুর ভর ও প্রযুক্ত বলের আলোচনা না করিয়াই শুদ্ধ গতির আলোচনা করিয়াছি। কিন্তু বলই গতির কারণ, আবার এই বল বিভিন্ন ভরের বস্তুতে বিভিন্ন বেগ উৎপাদন করে।

টেবিলের উপর একটি ছোট পুস্তক রাখিয়া উহাতে ধাক্কা দাও—পুস্তকটির একটা বেগ হইবে। এখন একখানি ভারী অভিধান টেবিলের উপর রাখ এবং আগের সমান জোরে ধাক্কা দাও—দেখিতে পাইবে, আগের সমান বেগ অভিধানে সঞ্চারিত হইবে না। এমনও হইতে পারে—অভিধানটি মোটেই নড়িল না। তবেই বুঝিতে পারিলে, গতি নির্ভর করে প্রযুক্ত বল এবং বস্তুর ভরের উপর।

গতিবিদ্যার যে অংশে ভর ও বলের পরিপ্রেক্ষিতে গতির আলোচনা করা হয় তাহাকে **কাইনেটিক্স** (Kinetics) বলে।

8-4. নিউটনের তিনটি গতিসূত্র (Newton's three Laws of Motion) :

গতি পর্যালোচনা করিতে গিয়া নিউটন তিনটি সূত্রে গতি, ভর ও বলের সম্বন্ধ দিয়াছেন। এই তিনটি সূত্রই বলবিদ্যার ভিত্তি।

প্রথম সূত্র ঃ বস্তুমাত্রেরই স্থিরাবস্থা বা সমবেগে এক সরল-রেখায় গতিশীল অবস্থা চিরকাল ধরিয়া চলিতে থাকে ; কেবল বাহিরের কোন বলপ্রয়োগের দ্বারা বাধ্য হইলেই এই অবস্থার পরিবর্তন ঘটে।

দ্বিতীয় সূত্র ঃ বস্তুর ভরবেগের পরিবর্তনের হার প্রযুক্ত বলের সমানুপাতিক এবং ইহা বল যে দিকে ক্রিয়া করে সেদিকে ঘটিয়া থাকে।

তৃতীয় সূত্র ঃ প্রত্যেক ক্রিয়ারই (action) সমান ও বিপরীত প্রতিক্রিয়া (reaction) আছে।

এখন, এই তিনটি সূত্রের বিশদ আলোচনা করিব।

[প্রথমও দ্বিতীয় সূত্র গ্যালিলিও (1590 খ্রীঃ নাগাদ) আবিষ্কার করিয়াছিলেন। তৃতীয় সূত্র হুক, হাইগেন্‌স্‌, ওয়ালিস্‌, রেন এবং অন্যান্য বিজ্ঞানিগণ বিশিষ্টরূপে প্রকাশ করিয়া গিয়াছেন।

1686 খ্রীষ্টাব্দে নিউটন তাঁহার 'প্রিন্সিপিয়া' নামক প্রসিদ্ধ গ্রন্থে গতির তিনটি সূত্রকে সুসংবদ্ধ রূপ দিয়াছেন। ইহাদের কোন পরীক্ষামূলক বা বিধিমত অন্যপ্রকার প্রমাণ দেওয়া যায় না। এই তিনটি সূত্রকে ভিত্তি করিয়া সমগ্র গতিবিদ্যার তথা জ্যোতিষের গণনাদি সম্পন্ন হয়। চন্দ্র-সূর্য-গ্রহ-নক্ষত্রের গতিবিধি, গ্রহণ-গণনা এবং বহুপূর্ব হইতে তাহাদের বিষয়ে ভবিষ্যদ্বাণী সর্বদাই সত্য প্রমাণিত হয়। গতিসূত্র তিনটিকে ভিত্তি করিয়া যে সকল সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় তাহারা সত্য ; অতএব, গতিসূত্র তিনটি সত্য না হইয়া পারে না।

প্রথম সূত্রের আলোচনা

8-5. প্রথম সূত্রের দুই অংশ—প্রথম অংশ জাড্য সূত্র ; দ্বিতীয় অংশে বলের সংজ্ঞা রহিয়াছে। (1-1 সংজ্ঞা দ্রষ্টব্য)

জাড্য সূত্র ঃ পদার্থমাত্রই জড়তাপ্রবণ—স্বতঃপ্রবৃত্ত হইয়া কোন বস্তু তাহার স্থিরাবস্থা বা চলমান অবস্থার পরিবর্তন ঘটায় না। যে বস্তু স্থির তাহা চিরকালই স্থিরাবস্থায় থাকিবে—ইহা **স্থিতিজাড্য** ; যে বস্তু সরলরেখায় সমগতিতে চলিতেছে তাহা চিরকালই ঐ রকম চলিতে থাকিবে—ইহা **গতিজাড্য**।

স্থিতিজাড্য সহজে বোধগম্য। তোমার পড়িবার টেবিল কিংবা টেবিলের উপর যে বই রহিয়াছে তাহা আপনা হইতে কখনই স্থান ত্যাগ করে না। কিন্তু গতিজাড্য সহজে বোধগম্য নয়। ইহার কারণ হইল বস্তুকে বলের ক্রিয়া হইতে মুক্ত করা যায় না।

একটি গোলককে মাটিতে গড়াইয়া দিলে উহার গতিবেগ ক্রমশ কমিতে থাকে এবং এক সময়ে গোলকটি থামিয়া যায়। গোলক ও মাটির ঘর্ষণজনিত

একটি বল বিপরীত দিকে ক্রিয়া করিয়া গোলকের বেগ কমাইয়া দেয় এবং পরিশেষে তাহাকে স্থিরাবস্থায় আনয়ন করে। কোন সমতলে একটা গোলক গড়াইয়া দিলে সমতল যত বেশী মসৃণ হয়, ঘর্ষণজনিত বল তত কম হয় এবং গোলকটি সরলপথে তত অধিক দূর যায়। তল যত মসৃণই হউক না কেন ঘর্ষণ-জনিত বল কিছু থাকিবেই, তদুপরি বাতাসও বাধা দেয়। সকল বাধা অপসারিত করিতে পারিলে গোলকটি সমবেগে এক সরলরেখায় চলিতে থাকিত।

গাড়িতে বসিয়া আছ—হঠাৎ যদি গাড়ি চলিতে আরম্ভ করে তুমি গাড়ির গতির বিপরীত দিকে হেলিয়া পড়। গাড়ি যখন স্থির ছিল তোমার দেহও স্থির অবস্থায় ছিল। গাড়ির যখন গতি হইল তখন গাড়ির সহিত সংলগ্ন দেহাংশও গতিশীল হইল, কিন্তু দেহের উপরের অংশ স্থিতিজাড্যের জন্য পূর্বের স্থিরাবস্থায় থাকিতে চায়; ফলে, তুমি হেলিয়া পড়।

সমবেগে গতিশীল রেলগাড়িতে যখন কোন লোক দাঁড়াইয়া থাকে তখন তাহাকে সম্মুখে ঠেলিয়া দেওয়া হইতেছে বলিয়া সে কখনও মনে করিবে না। হঠাৎ যদি গাড়ি থামিয়া যায় তাহা হইলে তাহার চল-প্রবণতা হেতু সে সামনের দিকে পড়িয়া যাইবে। ইহা গতিজাড্য।

দ্রুতবেগে চলমান গাড়ি হইতে কেহ নামিয়া পড়িলে সে সাধারণতঃ সামনের দিকে পড়িয়া যাইবে। তাহার পা মাটিতে আসিয়া থামিয়া গেল কিন্তু দেহের উপরের অংশ আগের মতই চলিতেছে; সুতরাং লোকটি পড়িয়া যায়। এইজন্য বাস বা ট্রাম থামিবার আগে যখন তুমি নামিয়া পড় তখন দেহের ঊর্ধ্বাংশকে তুমি পিছনদিকে হেলাইয়া রাখিতে চেষ্টা কর অথবা সামনের দিকে কিছু বেগ দিয়া তবে নামিয়া পড়।

জাড্য ও ভর (Inertia and mass) ঃ পৃথক্ ভরের দুইটি বস্তুতে সমান বেগ-পরিবর্তন সাধন করিতে হইলে বলের পরিমাণ ভরের সমানুপাতে হইয়া থাকে; অর্থাৎ ভর দ্বিগুণ হইলে বল দ্বিগুণ, ভর দশগুণ হইলে বলও দশগুণ এইরূপ। বস্তুর যে ধর্মের জন্য তাহার বেগ-পরিবর্তন সাধন করিতে হইলে ভিন্ন ভিন্ন বস্তুতে ভিন্ন ভিন্ন বল প্রয়োগের প্রয়োজন হয় তাহাই জাড্য। এইজন্য **ভরকে** জাড্যের পরিমাপ বলা হয়।

8-6. আনুষঙ্গিক বীজগণিত পরিচয় ঃ

একটি রাশি y এবং অপর একটি রাশি x-এর মধ্যে যদি এরূপ সম্বন্ধ থাকে যে x-এর মান পরিবর্তন করিলে y-এর মান একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয়,

তাহা হইলে y-কে x-এর সমানুপাতে আছে বলা হয়। ('y এবং x সরল ভেদে আছে' এরূপও বলা হয় এবং সংক্ষেপে প্রকাশ করা হয় $y \propto x$ এই চিহ্ন দ্বারা)

মনে কর, যখন x-এর মান x_1 তখন y-এর মান y_1

যখন x-এর মান x_2 তখন y-এর মান y_2

যখন x-এর মান x_3 তখন y-এর মান y_3

এই প্রকার।

তাহা হইলে সংজ্ঞানুসারে,

$$\frac{y}{y_1} = \frac{x}{x_1},\ \frac{y}{y_2} = \frac{x}{x_2},\ \frac{y}{y_3} = \frac{x}{x_3}, \ldots\ldots$$

$$\therefore\ \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = k \text{ (একটি ধ্রুবক)।}$$

ইহা হইতে দেখা গেল, $y = kx$

মনে রাখিবে, $y \propto x$ এবং $y = kx$ একই বক্তব্য প্রকাশ করে।

দৃষ্টান্ত : (i) মনে কর, একটি রেলগাড়ি সমবেগে ঘণ্টায় 30 মাইল যাইতেছে। তাহা হইলে

2 ঘণ্টায় যায় $2 \times 30 = 60$ মাইল ;

3 ঘণ্টায় যায় $3 \times 30 = 90$ মাইল ;

10 ঘণ্টায় যায় $10 \times 30 = 300$ মাইল ;

এইরূপ।

আবার $\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় যায় 15 মাইল ;

$\frac{1}{3}$ ঘণ্টায় যায় 10 মাইল ;

ইত্যাদি ;

সময় 2 গুণ হইলে দূরত্ব 2 গুণ, সময় 3 গুণ হইলে দূরত্ব 3 গুণ এইরূপ ; আবার সময় $\frac{1}{2}$ হইলে দূরত্ব $\frac{1}{2}$, সময় $\frac{1}{3}$ হইলে দূরত্ব $\frac{1}{3}$, এইরূপ ; অতএব, দূরত্ব সময়ের সমানুপাতে অর্থাৎ দূরত্ব $\propto$ সময়।

(ii) 100 টাকাতে 80 কিলোগ্রাম চিনি পাওয়া গেলে y এবং x-এর সম্বন্ধ কি ? 175 টাকাতে কত পরিমাণ চিনি পাওয়া যাইবে ?

চিনির পরিমাণ-y প্রদত্ত মূল্য x-এর সমানুপাতে অর্থাৎ $y \propto x$ বা $y = kx$.

$y = kx$ সমীকরণ হইতে $80 = k.100$ অর্থাৎ $k = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$.

$$\therefore\ y = \tfrac{4}{5}x$$

যখন $x=175$ তখন $y=\frac{4}{5}\times175=140$.

$\therefore$ চিনির পরিমাণ 140 কিলোগ্রাম।

[**দ্রষ্টব্য :** এই উদাহরণে ধ্রুবক (constant) $k=\frac{4}{5}$.

এখানে সহজ উদাহরণ মাত্র দেওয়া গেল। এই প্রশ্নের উত্তর ছাত্রেরা অন্য উপায়ে দিতে জানে। কিন্তু ভেদ (variation) বীজগণিতের একটি প্রয়োজনীয় জ্ঞাতব্য বিষয়। ভেদের নানাপ্রকার জটিল প্রশ্নসমূহ আছে। পদার্থ-বিদ্যা এবং বিজ্ঞান ও গণিতের বিভিন্ন শাখায় ইহার ব্যবহার পাওয়া যায়।]

দ্বিতীয় সূত্রের আলোচনা

8-7. দ্বিতীয় সূত্র হইতে আমরা বলের পরিমাপ পাই।

বলের গতীয় পরিমাপ নির্ণয় :

মনে কর, 'm' বস্তুর ভর, 'f' ইহার ত্বরণ এবং P প্রযুক্ত বল।

নিউটনের দ্বিতীয় সূত্র অনুসারে,

P ভরবেগ পরিবর্তনের হারের সমানুপাতে

অর্থাৎ mv পরিবর্তনের হারের সমানুপাতে

অর্থাৎ $m\times v$ পরিবর্তনের হারের সমানুপাতে

[$\because$ m-এর পরিবর্তন হয় না]

অর্থাৎ mf-এর সমানুপাতে.

$P \propto mf$

$\therefore$ $P=kmf$ (এখানে k একটি ধ্রুবক)

এখন বলের একক যদি এরূপভাবে গ্রহণ করা হয় যে উহা একক ভরে একক ত্বরণ উৎপাদন করে, অর্থাৎ যখন $m=1$ এবং $f=1$, তখন $P=1$, তাহা হইলে $1=k.1.1.$ অর্থাৎ $k=1$

অতএব $P=mf$

বল = ভর × ত্বরণ

এই সম্বন্ধ কখনও কখনও নিম্নরূপে প্রকাশ করা হয়

$$\text{ত্বরণ}=\frac{\text{গতি উৎপাদনকারী বল}}{\text{গতিশীল বস্তুর ভর}}$$

8-8. পূর্ব অনুচ্ছেদে দেখা গেল, গতিবিদ্যায় বলের একক ভরের ও ত্বরণের এককের উপর নির্ভর করে। কিন্তু ত্বরণের একক দৈর্ঘ্য ও সময়ের এককের

উপর নির্ভর করে। অতএব বলের একক ভর, দৈর্ঘ্য, এবং সময়ের এককের উপর নির্ভর করে।

(ক) এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে বলের এককের নাম দেওয়া হইয়াছে পাউণ্ডাল।

পাউণ্ডাল (Poundal) : যে বল এক পাউণ্ড ভরের উপর প্রযুক্ত হইলে প্রতি সেকেণ্ডে এক সেকেণ্ডে এক ফুট (1 ফু সে^{2}) ত্বরণ উৎপাদন করে তাহাকে এক পাউণ্ডাল বলে।

অতএব $P=mf$ এই সম্বন্ধ বা সমীকরণে ভর m পাউণ্ড, ত্বরণ f ফু./সে^{2}. এবং বল P পাউণ্ডাল।

(খ) সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে বলের একককে ডাইন (Dyne) বলা হয়।

যে বল এক গ্রাম ভরের উপর প্রযুক্ত হইলে প্রতি সেকেণ্ডে এক সেকেণ্ডে এক সেন্টিমিটার (1 সে. মি./সে.^{2}) ত্বরণ উৎপাদন করে, তাহাকে এক **ডাইন** (Dyne) বলে।

অতএব $P=mf$ এই সম্বন্ধ বা সমীকরণে
ভর m গ্রাম, ত্বরণ f সে. মি/সে^{2} এবং বল P ডাইন।

[**দ্রষ্টব্য :** প্রশ্ন সমাধানের সময়ে এককের কথা সর্বদা স্মরণ রাখিতে হইবে।]

8-9. ভর ও ভার : যখন আমরা কোন বস্তুকে মাটি হইতে তুলি, তখন আমাদিগকে উপরদিকে একটা বল প্রয়োগ করিতে হয়। ধরিয়া না রাখিলে বা কোন বাধা না পাইলে বস্তু নীচের দিকে পড়িয়া যায়। অতএব নীচের দিকে কোন বল নিশ্চয়ই কাজ করে। এই বল ঐ বস্তুর ভার। পৃথিবী প্রত্যেক বস্তুকে তাহার কেন্দ্রের দিকে আকর্ষণ করে।

সংজ্ঞা : যে বল দিয়া পৃথিবী কোন বস্তুকে তাহার কেন্দ্রের দিকে আকর্ষণ করে তাহাকে ঐ বস্তুর ভার (weight) বলে।

আমরা দেখিয়াছি, পৃথিবীর আকর্ষণের জন্য প্রত্যেক বস্তুরই নীচের দিকে (অর্থাৎ পৃথিবীর কেন্দ্রের দিকে) অভিকর্ষজ ত্বরণ g আছে। অতএব যদি একটি বস্তুর ভর m হয় এবং ভার W হয়, তাহা হইলে $P=mf$ সমীকরণে P স্থলে W এবং f স্থলে g লিখিয়া, আমরা পাই

$$W=mg$$

বস্তুর ভরকে (mass) অভিকর্ষজ ত্বরণ 'g' দিয়া গুণ করিলে তাহার ভার (weight) পাওয়া যায়

এখন মনে কর, W_1 এবং W_2 দুইটি বস্তুর ভার ; m_1 এবং m_2 তাহাদের ভর। যেহেতু g প্রত্যেকের জন্যই এক

$$\therefore \quad W_1 = m_1 g$$

$$W_2 = m_2 g$$

এবং $\dfrac{W_1}{W_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$ (ভাগ করিয়া)

দেখা গেল, বস্তুর ভার ভরের সমানুপাতে।

দুইটি বস্তুর ভার যদি সমান হয় তাহাদের ভরও সমান। একটির ভার আর একটির দ্বিগুণ হইলে ভরও দ্বিগুণ, ভার দশগুণ হইলে ভর দশগুণ, এই প্রকার।

তুলাযন্ত্র (Balance) দিয়া ভারের তুলনা করা হয়।

তুমি দোকানে এক কিলোগ্রাম চিনি কিনিতে গিয়াছ। দোকানী এক দিকের পাল্লায় রাখিল এক কিলোগ্রাম বাট্‌খারা (Standard weight), অন্য দিকের পাল্লায় চিনি রাখিয়া তৌল করিল। ইহাতে এই প্রমাণিত হইল যে, এক কিলোগ্রাম বাটখারাকে পৃথিবী যে বল দিয়া আকর্ষণ করিতেছে চিনিকে ও সেই বলে আকর্ষণ করিতেছে অর্থাৎ উভয়ের ভার (weight) সমান। সুতরাং উভয়ের ভরও সমান। বুঝা গেল, এক কিলোগ্রাম বাটখারাতে যে পরিমাণ পদার্থ আছে চিনিতেও তাহার সমান পদার্থ আছে।

8-10. ভর ও ভারের পার্থক্য :

(1) কোন বস্তুর ভর বলিতে তাহার ভিতর কি পরিমাণ জড় বা পদার্থ আছে তাহা বুঝায় ; কিন্তু ভার একটি বল। কোন বস্তুর ভার বলিতে পৃথিবী তাহাকে যে বল দিয়া আকর্ষণ করে সেই বল বুঝায়।

(2) বস্তুর ভরকে 'g'-এর মান দিয়া গুণ করিলে তাহার ভার পাওয়া যায়। কোন বস্তুর ভর অর্থাৎ তাহাতে যে পরিমাণ পদার্থ আছে তাহা একটি স্থির রাশি অর্থাৎ বস্তুর ভরের কোন পরিবর্তন হয় না কিন্তু g-এর মান পৃথিবীর সর্বত্র সমান নহে ; g-এর মান নির্ভর করে পৃথিবীর কেন্দ্র হইতে দূরত্বের উপর। ভূ-পৃষ্ঠের উপর মেরুবিন্দুদ্বয়ে g-এর মান সর্বাপেক্ষা বেশি এবং নিরক্ষরেখা

সর্বাপেক্ষা কম।* আবার ভূ-পৃষ্ঠ হইতে পর্বতের চূড়ায় g-এর মান কম। সুতরাং একটি বস্তুকে বিভিন্ন স্থানে লইয়া গেলে তাহার ভারের পরিবর্তন হয়।

(3) ভারের মান এবং দিক্ আছে,—ভার একটি ভেক্টর রাশি। ভরের কেবলমাত্র মান আছে ; ইহা স্কেলার রাশি।

বিঃ দ্রঃ—যদিও ভর এবং ভার পৃথক, সাধারণ ভাষায় ইহাদের মধ্যে কোন পার্থক্য করা হয় না।

'বস্তুর ভার 10 পাউণ্ড' বলিলে বুঝায় 10 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট বস্তুর ভার অর্থাৎ 10 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট বস্তুর উপর পৃথিবীর আকর্ষণ বল। **'বল = 10 পাউণ্ড ভার বা 10 পাউণ্ড ভারের বল' বলিলে বুঝায় '10 পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট বস্তুর ভারের সমান বল অর্থাৎ পৃথিবী '10 পাউণ্ড ভর-বিশিষ্ট বস্তুকে যে বল দিয়া আকর্ষণ করে তাহার সমান বল'।**

8·11. এক পাউণ্ড ও এক গ্রামের ভার :

1 পাউণ্ডের ভার $= 1 \times 32 = 32$ **পাউণ্ডাল** (g-পাউণ্ডাল)।

1 গ্রামের ভার $= 1 \times 980$ **ডাইন** (g ডাইন)।

এবং **1 পাউণ্ডাল** $= \frac{1}{32}$ পাউণ্ড ভার $\left(\frac{1}{g}\right.$ পাউণ্ড ভার $\left.\right)$।

1 ডাইন $= \frac{1}{980}$ গ্রাম ভার $\left(\frac{1}{g}\right.$ গ্রাম ভার $\left.\right)$।

8-12. বলের পরম বা গতীয় একক (Absolute or Dynamical unit of Force) :

এক **পাউণ্ডাল** বল এক পাউণ্ড ভরের বস্তুতে 1 ফু./সে.^{2} ত্বরণ উৎপাদন করে। ইহা একটি স্থির একক। ইহাকে বলের **পরম** বা **গতীয়** একক বলে।

সি. জি. এস্ পদ্ধতির **ডাইনও** এইরূপ পরম বা গতীয় একক।

---

* মেরুতে g-এর মান প্রায় 32·252 ফু/সে.^{2} এবং নিরক্ষরেখায় ইহা 32·091 ফু/সে.^{2}। সি. জি. এস্. এককে ইহারা যথাক্রমে 938·11 সে. মি./সে.^{2} এবং 978·10 সে. মি./সে.^{2}

অন্যরূপ উল্লেখ না থাকিলে এই পুস্তকে 'g'-এর স্থূলমান এফ পি. এস্. একক 32 ফু./সে.^{2} এবং সি. জি. এস্. এককে 980 সেমি/সে^{2} ধরা হইবে।

বলের মহাকর্ষীয় বা স্থিতীয় একক (Gravitational or Statical unit of Force) :

এক **পাউণ্ড ভার** হইল সেই বল যাহা এক পাউণ্ড ভরের বস্তুতে g-ত্বরণ উৎপাদন করে। কিন্তু g-এর মান পৃথিবীর কেন্দ্র হইতে দূরত্বের উপর নির্ভর করে বলিয়া ইহা নির্দিষ্ট নহে। পৃথিবীর সর্বত্র পাউণ্ডভার সমান নয়।

এইরূপ এক **গ্রামভারও** পৃথিবীর সর্বত্র সমান নহে।

পাউণ্ডভার অর্থাৎ এক পাউণ্ড ভরবিশিষ্ট বস্তুর ভার (weight of 1 pound mass) এবং **গ্রামভার** অর্থাৎ এক গ্রাম ভরবিশিষ্ট বস্তুর ভার (weight of 1 gram mass) কখনও কখনও বিশেষতঃ স্থিতিবিদ্যায় বলের এককরূপে ব্যবহৃত হয়। ইহাদিগকে মহাকর্ষীয় একক বা স্থিতীয় একক (Gravitational or Statical unit of force) বলে।

সাধারণতঃ গতিবিদ্যায় বলের একক পাউণ্ডাল ও ডাইন; স্থিতিবিদ্যায় পাউণ্ডভার ও গ্রামভার।

8-13. পাউণ্ডাল ও ডাইনের সম্বন্ধ :

1 পাউণ্ড = 453·6 গ্রাম,

1 ফুট = 30·48 সেন্টিমিটার ;

এখন, 1 পাউণ্ডাল = 1 পাউণ্ড × 1 ফু./সে.^{2}

= 453·6 গ্রাম × 30·48 সে. মি/সে.^{2}

= 453·6 × 30·48 ডাইন

= 13825·728 ডাইন

1 পাউণ্ডাল = 13,800 ডাইন (স্থূল মান)।

8-14. উদাহরণ :

1. 16 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুর উপর বলপ্রয়োগের ফলে উহা স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া 5 সেকেণ্ড পরে সেকেণ্ডে 20 ফুট বেগ অর্জন করে। বলের মান নির্ণয় কর।

$v=u+ft$ সমীকরণ হইতে

যেহেতু $u=0$, $v=20$, $t=5$ $\therefore$ $20=f.5$ অর্থাৎ $f=\frac{20}{5}=4$ ফু./সে.^{2}

মনে কর, P (পাউণ্ডাল) নির্ণেয় বল, তাহা হইলে

$P=16\times4=64$ পাউণ্ডাল $=\frac{64}{32}=2$ পাউণ্ডভার।

2. মসৃণ অনুভূমিক সমতলের উপর 10 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু রাখিয়া ইহার উপর অনুভূমিক দিকে 4 পাউণ্ড ভারের সমান বলপ্রয়োগ করা হইল ; ইহা 10 সেকেণ্ডে কতদূর যাইবে ?

$P=4$ পাউণ্ড ভার $=4\times 32$ পাউণ্ডাল,

$m=10$ পাউণ্ড ; f নির্ণয় করিতে হইবে।

$P=mf$ সূত্রে

$4\times 32=10f, \quad \therefore \quad f=\frac{4\times 32}{10}$ ফু./সে.^{2}

এখন, $s=\frac{1}{2}ft^2$ হইতে দূরত্ব $=\frac{1}{2}\times\frac{4\times 32}{10}\times 10^2$

$=2\times 32\times 10=640$ ফুট।

3. একটি বল এক কিলোগ্রাম ভরের উপর 10 সেকেণ্ড ক্রিয়া করিয়া ইহাতে প্রতি সেকেণ্ডে 2 মিটার বেগ উৎপাদন করে। বলের মান নির্ণয় কর।

উৎপন্ন বেগ $v=$ সেকেণ্ডে 2 মিটার $=200$ সে. মি./সে. ; $t=10$ সেকেণ্ড

এখন $v=ft$ সূত্রের সাহায্যে

$200=f.\ 10 \qquad f=20$ সি. জি. এস্. একক।

এখানে $m=1$ কিলোগ্রাম $=1000$ গ্রাম,

$\therefore$ বল $=1000\times 20=20{,}000$ ডাইন $=\frac{20000}{980}$ গ্রাম ভার

$=20{\cdot}4$ গ্রামভার (আসন্ন মান)।

4. একটি রেলগাড়ীর ভর 100 টন ; এঞ্জিন ইহাকে $2\frac{1}{2}$ টন ভারের সমান বলে টানিতে থাকিলে কত পথ অতিক্রম করার পর ইহার বেগ ঘণ্টায় 60 মাইল হইবে ?

প্রযুক্ত বল $=2\frac{1}{2}$ টনের ভার $=\frac{5}{2}\times 2240\times 32$ পাউণ্ডাল,

ভর $=100\times 2240$ পাউণ্ড ;

এখন $P=mf$ সমীকরণ হইতে

$\frac{5}{2}\times 2240\times 32=100\times 2240\times f, \quad \therefore \quad f=\frac{5\times 32}{2\times 100}=\frac{4}{5}$ ফু./সে.^{2}

মনে কর, s ফুট পথ অতিক্রম করিয়া $v=$ ঘণ্টায় 30 মাইল

$=$ সেকেণ্ডে 88 ফুট।

$v^2=2fs$ সূত্র হইতে

$88^2=2\times\frac{4}{5}s, \quad \therefore \quad s=\frac{88\times \overset{11}{\cancel{88}}\times 5}{\cancel{8}}$ ফুট,

$=440\times 11$ ফুট $=\frac{11}{12}$ মাইল।

[**দ্রষ্টব্য :** এই প্রশ্নে গাড়ি চলিবার সময় বিপরীত দিকে ঘর্ষণ ও অন্যান্য বাধা ধরা হয় নাই।]

5. স্টীম বন্ধ করিয়া দিলে 440 ফুট অতিক্রম করিয়া একটি রেলগাড়ির বেগ ঘণ্টায় 30 মাইল হইতে ঘণ্টায় 15 মাইলে পরিণত হইল। গাড়ির ভর 80 টন হইলে গাড়ির উপর কি বাধা ক্রিয়া করিয়া উহার বেগ কমাইতেছিল? গাড়ি আর কতদূর গিয়া থামিয়া যাইবে?

ঘণ্টায় 30 মাইল = সেকেণ্ডে 44 ফুট,

ঘণ্টায় 15 মাইল = সেকেণ্ডে 22 ফুট।

u = সেকেণ্ডে 44 ফুট, v = সেকেণ্ডে 22 ফুট, $s = 440$ ফুট ;

মনে কর, সমমন্দন $= f$

$\therefore \quad v^2 = u^2 - 2fs$ সমীকরণ হইতে

$$22^2 = 44^2 - 2f.440$$

অথবা, $2f.\ 440 = 44^2 - 22^2 = (44+22)(44-22)$

$$\therefore \quad f = \frac{66 \times 22}{2 \times 440} = \frac{33}{20} \text{ ফু./সে.}^2 \text{।}$$

$m = 80$ টন $= 80 \times 2240$ পাউণ্ড ;

বাধা $P = mf = 80 \times 2240 \times \frac{33}{20}$ পাউণ্ডাল।

$$= \frac{80 \times 2240 \times 33}{20 \times 32} \text{ পাউণ্ড ভার।}$$

$$= \frac{80 \times 2240 \times 33}{20 \times 32 \times 2240} \text{ টন ভার}$$

$= 4\frac{1}{8}$ টন ভার।

আরও x ফুট অতিক্রম করিয়া যদি গাড়ি থামিয়া যায় অর্থাৎ $v = 0$ হয়, তাহা হইলে $0 = 22^2 - 2 \times \frac{33}{20}x$.

$$\therefore \quad x = \frac{22 \times 22 \times 20}{2 \times 33} \text{ ফুট} = \frac{440}{3} \text{ ফুট} = 146\frac{2}{3} \text{ ফুট।}$$

6. 10 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে 10 ফুট পতিত হয়; তৎপর বালির ভিতর 1 ফুট প্রবেশ করিয়া স্থিরাবস্থায় আসে। বালির বাধা নির্ণয় কর।

বালিতে প্রবেশের সময় প্রারম্ভিক বেগ u

= 10 ফুট পতনজ বেগ $= \sqrt{2g.\ 10} = \sqrt{2 \times 32 \times 10}$

1 ফুট সরণের পর অন্তিম বেগ $v=0$; ধর, সমমন্দন$=f$

$v^2=u^2-2fs$ সমীকরণ হইতে

$0=2\times32\times10-2f.1$

$\therefore \quad f=320$ ফুট/সে.^{2}

এখন মনে কর, বালির বাধা P পাউণ্ডাল,

বালির ভিতর দিয়া চলার সময়ে উর্ধ্বাভিমুখী বাধা P এবং নিম্নাভিমুখী ভার mg ক্রিয়া করে, $\therefore$ উর্ধ্বাভিমুখী লব্ধি বল$=P-mg$.

স্বতরাং $P-10\times32=10\times320$,

$P=10\times32\ (10+1)=110\times32$ পাউণ্ডাল

$=110$ পাউণ্ড ভার।

7. কূপ হইতে এক বালতি জল 4 ফুট/সে^{2}. সমত্বরণে উঠান হইতেছে। জলভরতি বালতির ভার 20 পাউণ্ড হইলে দড়িতে কি বল প্রয়োগ করা হইয়াছে ?

মনে কর, প্রযুক্ত বল P পাউণ্ডাল।

বালতির উপর উর্ধ্বাভিমুখী বল P এবং নিম্নাভিমুখী বল জলসহ বালতির ভার $20g$ পাউণ্ডাল। অতএব লব্ধি বল বা মোট বল হইল উর্ধ্বাভিমুখে $P-20g$

এখন $P-20g=mf=20\times4$;

$\therefore \quad P=20\times4+20\times32=80+640=720$ পাউণ্ডাল

$=\frac{720}{32}$ পাউণ্ড ভার$=22\frac{1}{2}$ পাউণ্ড ভার ;

8. m গ্রাম ভরের একটি কামানের গোলা সেকেণ্ডে v সেন্টিমিটার বেগে বাহির হইয়া আসে। যদি কামানের নলের দৈর্ঘ্য s সেন্টিমিটার হয়, প্রমাণ কর যে বিস্ফোরণ কালে গোলার উপর গড়ে $\frac{mv^2}{2s}$ ডাইন পরিমাণ বল ক্রিয়া করে।

মনে কর, গড় বল P, তাহা হইলে $P=mf\cdots\cdots(1)$

যেহেতু গোলা স্থিরাবস্থা হইতে s সেন্টিমিটার সরণের পর v বেগ অর্জন করে

$\therefore \quad v^2=2fs$ এবং $f=\frac{v^2}{2s}\cdots \quad (2)$

প্রথম সমীকরণে f-এর মান স্থাপন করিয়া $P=\frac{mv^2}{2s}$ ডাইন।

9. এঞ্জিন বাদে একটি রেলগাড়ীর ভর 435 টন। স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া 7 মিনিটে ইহা ঘণ্টায় 40 মাইল বেগ অর্জন করে। প্রতি টনে 15 পাউণ্ড ভারের সমান বাধা ক্রিয়া করিলে গাড়ির ও এঞ্জিনের মধ্যে টান নির্ণয় কর।

মনে কর, গাড়ির উপর এঞ্জিনের টান P পাউণ্ডাল। যেহেতু প্রতি টনে 15 পাউণ্ড ভারের সমান বাধা ক্রিয়া করে, মোট বাধার পরিমাণ

$$R = 435 \times 15 \text{ পাঃ ভার} = 435 \times 15 \times 32 \text{ পাউণ্ডাল,}$$

$\therefore$ গাড়ীর উপর লব্ধি বল $= P - 435 \times 15 \times 32$ পাউণ্ডাল

গাড়ীর ভর $m = 435$ টন $= 435 \times 2240$ পাউণ্ড

মনে কর f ত্বরণ,

যেহেতু 7 মিনিট বা 7×60 সেকেণ্ডে উৎপাদিত বেগ ঘণ্টায় 40 মাইল অর্থাৎ সেকেণ্ডে $\frac{44}{3} \times 4$ ফুট $\therefore$ $v = ft$ সূত্র হইতে

$$\frac{176}{3} = f \times 7 \times 60 \text{ বা } f = \frac{176}{3 \times 7 \times 60} \text{ ফু./সে}^2.$$

এখন $P - R = mf$ হইতে

$$P - 435 \times 15 \times 32 = \overset{145}{\cancel{435}} \times \overset{32}{\cancel{2240}} \times \frac{176}{\cancel{3} \times \cancel{7} \times \cancel{60}}$$

$$= 145 \times 16 \times \tfrac{176}{3}$$

$$P = (435 \times 15 \times 32 + 145 \times 16 \times \tfrac{176}{3}) \text{ পাউণ্ডাল}$$

$$= (435 \times 15 + 145 \times \tfrac{88}{3}) \text{ পাউণ্ড ভার [32 দিয়া ভাগ করিয়া]}$$

$$= 6525 + \tfrac{12760}{3} = 6525 + 4253\tfrac{1}{3} = 10778\tfrac{1}{3} \text{ পা. ভার।}$$

8-15. বলের প্রাকৃতিক স্বাধীনতা-তত্ত্ব (Principle of Physical Independence of Forces) :

বর্ণনা : **স্থির কিংবা গতিশীল যে কোন অবস্থায় একটি কণার উপর যদি যুগপৎ একাধিক বল প্রযুক্ত হয়, প্রত্যেক বল তাহার নিজের অভিমুখে একটি ত্বরণ সৃষ্টি করে।** ফলে, বস্তুর প্রকৃত ত্বরণ পৃথক্‌ভাবে জাত ত্বরণসমূহের লব্ধি; যে-কোন সময়ের প্রকৃত বেগ, বস্তুর প্রারম্ভিক বেগ থাকিলে সেই বেগ এবং এই সময়ে উৎপাদিত বেগসমূহের লব্ধি।

ব্যাখ্যা : দ্বিতীয় গতিসূত্রের দ্বিতীয় অংশে বর্ণিত হইয়াছে, বল যেদিকে প্রযুক্ত হয় ভরবেগের পরিবর্তনের হার সেই দিকে হইয়া থাকে। বল নিজের দিকে তাহার ফল অর্থাৎ ত্বরণ উৎপাদিত করে। ইহার অর্থ এই যে, (1) অন্যদিকে কোন ফল উৎপাদিত হয় না, (2) বল নিজের অভিমুখে যে ফল উৎপাদিত করে তাহা অন্যান্য ঘটনা-নিরপেক্ষ। যে কণার উপর বল প্রযুক্ত হইয়াছে তাহা স্থির আছে কিংবা তাহার অন্যদিকে কোন গতি আছে অথবা অন্য কোন বল তাহার উপর ক্রিয়া করিতেছে কি-না এই সমস্ত বিবেচনা করিবার প্রয়োজন নাই।

মনে কর, একটি কণার AB সরলরেখার দিকে একটা বেগ রহিয়াছে এবং ইহার উপর AC সরলরেখার দিকে একটি বল প্রযুক্ত হইয়াছে। এই তত্ত্ব হইতে আমরা পাই যে AB-র দিকে বেগের কোন পরিবর্তন নাই, বেগের পরিবর্তন কেবল AC-র দিকেই হইবে। যে-কোন t-সময়ান্তে বেগ নির্ণয় করিতে হইলে AB-র দিকের বেগের সহিত t সময়ে AC-র দিকে উৎপাদিত বেগের লব্ধি নির্ণয় করিতে হইবে। অন্য বল যদি থাকে প্রত্যেকের বেলায় এই যুক্তি প্রযোজ্য।

দৃষ্টান্ত : (ক) একটি দ্রুতগামী রেলগাড়িতে বসিয়া কোন যাত্রী যদি হাত হইতে একটি বস্তু ছাড়িয়া দেয়, উহা গাড়ি স্থির থাকিলে যে স্থানে পড়িত এখনও সেই স্থানেই পড়ে। ইহাতে বুঝা যায় যে, বস্তুটি গাড়ির বেগ লইয়া আগাইয়া গিয়াছে এবং অভিকর্ষ বল এই গতির উপর কোন ক্রিয়া করে নাই।

(খ) একজন দ্বি-চক্রযানের আরোহী বাম হাতে হাতল ধরিয়া ডান হাতে একটি খেলার বল উপরদিকে ছুঁড়িয়া দিল। বলটি তাহার হাতেই আসিয়া পড়িবে। অভিকর্ষ বস্তুটির অনুভূমিক (horizontal) গতির উপর কোন ক্রিয়া করে নাই।

(গ) টেবিলের উপর রক্ষিত বিভিন্ন বস্তু একই সঙ্গে বিভিন্ন অনুভূমিক বেগে প্রক্ষিপ্ত হইলে সকল বস্তুই একই সময়ে ভূমিতে পতিত হয়। অনুভূমিক-বেগের পার্থক্যের জন্য পতনকালের কোন পার্থক্য হয় না। ইহাতে বুঝা যায় নীচের দিকে অভিকর্ষজ বলের সহিত অনুভমিক বেগের কোন সংস্রব নাই।

নিউটনের তৃতীয় গতিসূত্রের আলোচনা

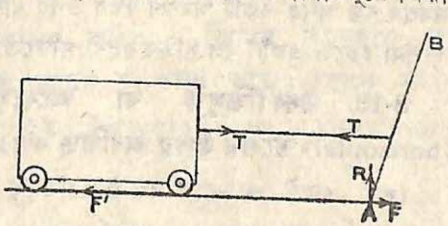
8-16. একটি বস্তু আর একটি বস্তুর উপর যে-বল প্রয়োগ করে তাহা **ক্রিয়া** (action)। তৃতীয় গতিসূত্র অনুসারে দ্বিতীয় বস্তু প্রথম বস্তুর উপর সমান বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করে ; ইহা **প্রতিক্রিয়া** (reaction)।

দৃষ্টান্ত ঃ (ক) টেবিলের উপর একখানি পুস্তক রাখিলে পুস্তক টেবিলের উপর যে বল প্রয়োগ করে বা চাপ দেয় টেবিল তাহার সমান বিপরীতমুখী বল প্রয়োগ করে। টেবিলের উপর পুস্তকের চাপ ক্রিয়া এবং পুস্তকের উপর সমান ও বিপরীতমুখী বল প্রতিক্রিয়া।

(খ) তুমি মাটির উপর দাঁড়াইয়া আছ। মাটিতে নীচের দিকে তোমার যে চাপ পড়িতেছে মাটি বিপরীত দিকে তোমার উপর সেই সমান বল প্রয়োগ করিতেছে। নীচের দিকে তোমার চাপ ক্রিয়া (action) এবং তোমার উপর বিপরীতমুখী বল প্রতিক্রিয়া (reaction) ; এই ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া সমান ও বিপরীতমুখী।

(গ) ঘোড়া যখন গাড়ি টানে তখন গাড়িতে যে টান পড়ে ঘোড়ার উপর বিপরীত দিকে সেই টান পড়ে। তাহা হইলে গাড়ি চলে কি করিয়া ?

ঘোড়া মাটির উপর তেরচাভাবে যে চাপ দেয়, তাহার বিপরীতমুখী প্রতিক্রিয়া হয়। ইহার উপাংশ F সম্মুখের দিকে এবং R উর্ধ্বাভিমুখে ক্রিয়া করে। দড়ির টান T ইহার দুই প্রান্তে বিপরীত মুখে ক্রিয়া করে। ঘোড়ার ভার এবং R সমান ও বিপরীতমুখী। গাড়ি যখন চলিতে চায় ঘর্ষণ-জনিত বিপরীতমুখী বল F′ ক্রিয়া করে।



$F > T$ হইলে ঘোড়া চলে। $T > F'$ হইলে গাড়ি চলে। প্রারম্ভে $F > T > F'$, যখন ঘোড়া ও গাড়ি সমগতিতে চলে তখন $F = T = F'$.

8-17. প্রত্যেক বলপ্রয়োগে দুইটি বস্তুর মধ্যে পরস্পরের ক্রিয়া বিদ্যমান থাকে। পরস্পরের মধ্যে এই যে ক্রিয়া ইহাকে **পীড়ন** (Stress) বলে। ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়ার ফলে পীড়ন উৎপাদিত হয়।

ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া প্রধানতঃ (1) **চাপ** (Pressure or Thrust)-জনিত, (2) **টান** (Tension)-জনিত, (3) **আকর্ষণ ও বিকর্ষণ** (Attraction and Repulsion)-জনিত এবং (4) **ঘর্ষণ** (Friction ,-জনিত।

1. চাপ ঃ টেবিলের উপর কোন ভারী বস্তু রাখিলে উহা টেবিলের উপর চাপ দেয় এবং এই ক্রিয়ার বিপরীত প্রতিক্রিয়া ঐ ভারী বস্তুর উপর কাজ করে।

একটি দণ্ডকে দেওয়ালে ঠেকাইয়া রাখিলে উহা দেওয়ালের উপর চাপ দেয় এবং দেওয়াল দণ্ডের উপর বিপরীতমুখী সমান বল প্রয়োগ করে।

2. টান ঃ কূপ হইতে জল তুলিবার সময় বালতিতে দড়ির যে টান পড়ে, হাতে তাহার সমান বিপরীতমুখী টান পড়ে।

3. আকর্ষণ ও বিকর্ষণ ঃ চুম্বক লৌহকে যে বলে আকর্ষণ করে লৌহও চুম্বককে সেই বলে আকর্ষণ করে।

পৃথিবী একটি প্রস্তরখণ্ডকে যেই বলে আকর্ষণ করে প্রস্তরখণ্ডও পৃথিবীকে সেই বলে আকর্ষণ করে।

দুইটি তড়িৎযুক্ত বস্তুর উভয়েই ধনতড়িৎ-যুক্ত অথবা উভয়েই ঋণতড়িৎ-যুক্ত হইলে তাহারা পরস্পরকে সমান বলে দূরে সরাইয়া দিতে চায়; ইহা বিকর্ষণ।

দ্রষ্টব্য ঃ আকর্ষণ ও বিকর্ষণ প্রত্যক্ষভাবে দুই বস্তু সংলগ্ন না হইয়া বা অন্য-কোন তৃতীয় বস্তুর সাহায্য ব্যতীত ঘটিয়া থাকে।

4. ঘর্ষণ (Friction) **ঃ** যখন কোন বাহ্যিক বল প্রয়োগের দরুন একটা অমসৃণ বস্তু অপর একটি অমসৃণ বস্তুর উপর ঘষিয়া চলিতে চায় বা চলে তখন আপনা হইতে একটা বল সক্রিয় হইয়া গতিতে বাধা জন্মায়; ইহাকে ঘর্ষণ বলে।

8-18. ঊর্ধ্বাভিমুখী বা অধোমুখী গতিশীল অনুভূমিক (horizontal) **তলের উপর অবস্থিত বস্তুর চাপ ঃ**

(ক) একটি m ভরের বস্তু ঊর্ধ্বাভিমুখী f-সমত্বরণবিশিষ্ট একটি অনুভূমিক তলের উপর রক্ষিত হইলে চাপ নির্ণয় কর।

বস্তুর উপর দুইটি বল ক্রিয়া করিতেছে—

(1) তলের উপর বস্তুর চাপের বিপরীতমুখী প্রতিক্রিয়া R ঊর্ধ্বাভিমুখে

(2) বস্তুর ভার mg নিম্নাভিমুখে।

ইহাদের লব্ধি $R-mg$ ঊর্ধ্বাভিমুখে এবং সেইদিকে বস্তুর ত্বরণ f.

$$\therefore \quad R-mg=mf$$

অর্থাৎ $R=m(g+f)$

দ্রষ্টব্য : চাপ বস্তুর ভার অপেক্ষা অধিক, সুতরাং বস্তুর প্রতীয়মান ভার বস্তুর প্রকৃত ভার অপেক্ষা অধিক।

(খ) m ভরের বস্তু অধোমুখী f-সমত্বরণবিশিষ্ট অনুভূমিক তলে রক্ষিত হইলে চাপ নির্ণয় কর।

বস্তুর উপর দুইটি বল ক্রিয়া করিতেছে—

(1) চাপের বিপরীতমুখী প্রতিক্রিয়া R′ ঊর্ধ্বাভিমুখে।

(2) বস্তুর ভার mg অধোমুখে।

ইহাদের লব্ধি $mg - R'$ অধোমুখে এবং সেইদিকে বস্তুর ত্বরণ f

$$\therefore \quad mg - R' = mf$$

অর্থাৎ $R' = m(g - f)$

[চাপ বস্তুর ভার অপেক্ষা কম, অতএব বস্তুর প্রতীয়মান ভার বস্তুর প্রকৃত ভার অপেক্ষা কম।]

লক্ষ্য কর : যখন $f = g$, $R' = 0$

অনুসিদ্ধান্ত : তল যদি **সমবেগে** উঠে বা নামে বস্তুর ত্বরণ $f = 0$,

$R - mg = 0$ এবং $mg - R' = 0$.

$\therefore \quad R = mg$, এবং $R' = mg$.

মহাকর্ষ

8-19. এই পরিচ্ছেদ শেষ করিবার পূর্বে আমরা **মহাকর্ষ** (Gravitation) সম্বন্ধে সামান্য আলোচনা করিব। **বিশ্বের যাবতীয় বস্তুর প্রত্যেকেই অপর যে-কোন বস্তুকে আকর্ষণ করে ;** ইহাকে **মহাকর্ষ বল** বলে। নিউটনের মহাকর্ষ সূত্র (Newton's Law of Gravitation) এক যুগান্তকারী আবিষ্কার।

মহাকর্ষ সূত্র।

বিশ্বের প্রত্যেক কণা বা বস্তু অপর কণা বা বস্তুকে নিজের দিকে আকর্ষণ করে। এই আকর্ষণের মান বস্তুকণা দুইটির ভরের গুণফলের সমানুপাতে এবং তাহাদের দূরত্বের বর্গের ব্যস্ত অনুপাতে।

গণিতের ভাষায়,

বস্তু দুইটির ভর m_1 এবং m_2 হইলে এবং তাহাদের মধ্যে দূরত্ব d হইলে,

মহাকর্ষ বল $= G\dfrac{m_1 m_2}{d^2}$ (G একটি ধ্রুবক)।

যে-কোন কণা অপর একটি কণাকে আকর্ষণ করে এবং প্রথম কণা দ্বিতীয় কণার উপর যেই বল প্রয়োগ করে দ্বিতীয় কণাও প্রথম কণার উপর বিপরীত দিকে সেই বল প্রয়োগ করে। পৃথিবী ক্ষুদ্র প্রস্তরখণ্ডকে যেই বলে টানিতেছে, প্রস্তরখণ্ডও পৃথিবীকে একই বলে টানিতেছে। তাহা হইলে একটি প্রস্তরখণ্ডকে ছাড়িয়া দিলে উহা পৃথিবীর দিকে পড়ে কেন? ইহার কারণ দেখ:

ধর, পৃথিবীর ভর M এবং প্রস্তরখণ্ডের ভর m, পৃথিবীর কেন্দ্র হইতে প্রস্তরখণ্ডের দূরত্ব d, পৃথিবী প্রস্তরখণ্ডের উপর যে বল প্রয়োগ করিতেছে তাহার মান $G.\frac{Mm}{d^2}$; প্রস্তরখণ্ডও পৃথিবীর উপর একই বল প্রয়োগ করিতেছে। এই বলের জন্য

$$\text{প্রস্তরখণ্ডের ত্বরণ} = \frac{\text{প্রযুক্ত বল}}{\text{প্রস্তরখণ্ডের ভর}} = G.\frac{M}{d^2}$$

$$\text{পৃথিবীর ত্বরণ} = \frac{\text{প্রযুক্ত বল}}{\text{পৃথিবীর ভর}} = G.\frac{m}{d^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{প্রস্তরের ত্বরণ}}{\text{পৃথিবীর ত্বরণ}} = \frac{M}{m}$$

কিন্তু M-এর তুলনায় m নগণ্য।

এখন বুঝিলে, কেন প্রস্তরখণ্ড পড়ে এবং কেন পৃথিবী প্রস্তরখণ্ডের দিকে ছুটিয়া আসে না।

দ্রষ্টব্য: পৃথিবী প্রত্যেক বস্তুকে যে বল দিয়া আকর্ষণ করে তাহাকে অভিকর্ষ (gravity) **বলা** হয়। ইহা মহাকর্ষ বলেরই একটি বিশেষ (particular) প্রয়োগ।

প্রশ্নমালা 8

1. অর্জিত ভরবেগ (momentum) নির্ণয় কর :—
   (i) 4 আউন্স ভর 1 সেকেণ্ড পড়িবার পর।
   (ii) 1 হন্দর ভর $\frac{1}{2}$ মিনিট পড়িবার পর।
   (iii) 1 কিলোগ্রাম ভর $\frac{1}{10}$ সেকেণ্ড পড়িবার পরে।
   (iv) 5 পাউণ্ড ভর 100 ফুট নীচে পড়িবার পরে।
   (v) 2 আউন্স ভর 400 গজ নীচে পড়িবার পরে।
   (vi) 2 মিলিগ্রাম ভর 10 মিটার নীচে পড়িবার পরে।

2. 10 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে 10 ফু./সে.² ত্বরণ লইয়া যাত্রা করিলে 6 সেকেণ্ডে কত ভর বেগ উৎপন্ন হইবে?

3. এক টন ভরের একটি বস্তু প্রতি সেকেণ্ডে সেকেণ্ডে 6 ইঞ্চি ত্বরণ (6 inches per sec. per sec) লইয়া স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিলে 9 ফুট যাওয়ার পর কত ভরবেগ উৎপন্ন হইবে?

4. সেকেণ্ডে 300 ফুট বেগবিশিষ্ট 20 পাউণ্ড ভরের একটি কামানের গোলার ভরবেগকে সেকেণ্ডে 700 ফুট বেগ-বিশিষ্ট 4 আউন্স ভরের গুলির ভরবেগের সহিত তুলনা কর।

5. 28 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু 2 সেকেণ্ড পড়িবার পর যেই ভরবেগ উৎপন্ন হয় তাহার সহিত 12 পাউণ্ড ভরের একটি কামানের গোলা সেকেণ্ডে 1000 ফুট বেগে ছুটিলে যে ভরবেগ হয় তাহার তুলনা কর।

6. (i) 10 পাউণ্ডাল বল 2 পাউণ্ড ভরের উপর প্রযুক্ত হইলে ত্বরণ কত হইবে?

(ii) 10 পাউণ্ডভার বল 20 পাউণ্ড ভরের উপর প্রযুক্ত হইলে ত্বরণ কত হইবে?

7. 25 পাউণ্ডাল বল 10 পাউণ্ড ভরের বস্তুর উপর ক্রিয়া করিলে বস্তুটি 30 সেকেণ্ডে কতদূর যাইবে?

8. 16 পাউণ্ড ভরের বস্তুর উপর ক্রিয়া করিয়া যে বল 10 ফুট-সেকেণ্ড একক ত্বরণ উৎপন্ন করে সেই বলের মান (i) কত পাউণ্ডাল, (ii) কত পাউণ্ড ভার।

9. 2 আউন্স ভারের সমান বল 2 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুর উপর প্রযুক্ত হইলে বস্তুটি স্থিরাবস্থা হইতে 64 ফুট যাইতে কত সময় লাগিবে?

10. 10 হন্দর ভরের উপর 10 সেকেণ্ড ক্রিয়া করিয়া একটি বল ঘণ্টায় 6 মাইল বেগ উৎপাদন করে। বলের মান নির্ণয় কর।

11. 10 গ্রাম ভরের সমান বল 81 গ্রাম ভরের বস্তুর উপর প্রযুক্ত হইয়া 2 সেকেণ্ড ক্রিয়া করিলে কত বেগ উৎপাদিত হয়? বস্তুটি এই সময়ে কত দূর যায়? দুই সেকেণ্ড পরে যদি বলের ক্রিয়া বন্ধ হয় তাহা হইলে পরবর্তী মিনিটে বস্তুটি কতদূর যাইবে? [$g=981$ সে. মি./সে²]

12. 100 টন ভরের একটি রেলগাড়ি ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে যাইতেছিল। ব্রেক কষিয়া ইহার উপর বল প্রয়োগ করিবার ফলে ইহা 10 সেকেণ্ডে স্থিরাবস্থায় আসে। এই সময় গাড়ীটি কত পথ অতিক্রম করে? বলের মান নির্ণয় কর। [ক. বি. 1940]

13. একটি রেলগাড়ীর ভর 300 টন। ইহা ঘণ্টায় 60 মাইল বেগে চলিতেছিল; ষ্টীম বন্ধ করিয়া ব্রেক কষা হইল এবং গাড়ীটি 50 গজ গিয়া থামিয়া পড়িল। গাড়ীর উপর কত বল কাজ করিতেছিল? [ক. বি. 1934]

14. একটি রেলগাড়ির ভর 4355 টন। স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া ইহা 7 মিনিটে ঘণ্টায় 40 মাইল বেগ অর্জন করে। প্রতি টনে 15 পাউণ্ড ভারের সমান বাধা ক্রিয়া করিলে ইঞ্জিন গাড়িকে কি বলে টানিতেছিল? [ক. বি. 1935]

15. একটি 4 পাউণ্ড ভরের বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে 200 ফুট পতিত হয়। তৎপর ইহা কাদার ভিতর 2 ফুট প্রবেশ করিয়া থামিয়া গেল। কাদার বাধা কত? [উ. প্র. 1940]

16. 100 পাউণ্ড ভরের একটি গোলা সেকেণ্ডে 1600 ফুট বেগে একটি লক্ষ্য ভেদ করে। লক্ষ্যের ভিতর প্রবেশ করিবার সময় যদি 12000 টন ভারের সমান বাধা পায় তাহা হইলে লক্ষ্যের ভিতর ইহা কতদূর প্রবেশ করিবে? [ক. বি. 1933]

17. 980 ডাইন বল একটি 5 গ্রাম ভরের বস্তুর উপর উর্ধ্বাভিমুখে প্রযুক্ত হইলে বস্তুটির ত্বরণ কত হইবে?

18. একজন 12 স্টোন ভরের লোক লিফ্‌ট করিয়া 8 ফু./সে.^{2} ত্বরণে নামিয়েছে; লিফ্‌টের উপর কত চাপ পড়িবে? সে যদি এই ত্বরণে উপর দিকে উঠে তাহা হইলেই বা চাপ কত হইবে? নামিবার সময় দড়ি ছিড়িয়া গেলে কি হইবে? উঠিবার সময় দড়ি ছিড়িয়া গেলে কি হইবে? [1 stone=14 lbs.] [ক. বি. 1943]

19. একটি রেলগাড়ীর ভর 40 টন; এঞ্জিন ইহাকে 2 টন ভারের সমান বলে টানিলে কত সময় পরে ইহার বেগ ঘণ্টায় 45 মাইল হইবে?

20. 4 আউন্স ভরের গুলি সেকেণ্ডে 1200 ফুট বেগে ছুটিতেছে। কি পরিমাণ বলে ইহাকে 1 সেকেণ্ড সময়ে থামাইতে পারে? [পাটনা, 1944]

21. 200 গ্রাম ভরের একটি বস্তুর উপর উর্ধ্বভিমুখে 240 গ্রাম ভার বল প্রয়োগ করিলে ইহা কি ত্বরণে উঠিবে? ইহাকে 50 মিটার উঠাইতে কত সময় লাগিবে? ($g=980$ সে. মি./সে.^{2})

22. একটি বস্তুর ভর 2 পাউণ্ড; ইহা সেকেণ্ডে 80 ফুট বেগে পড়িতেছে। কি বল প্রয়োগ করিলে ইহা (i) 2 সেকেণ্ড সময়ে থামিয়া যাইবে? (ii) 4 ফুট অতিক্রম করিয়া থামিয়া যাইবে?

23. একটি 4 পাউণ্ড গোলা একটি কামানের মুখ হইতে 1200 ফু./সে. বেগে নির্গত হয়। যদি গোলা কামানের নলের ভিতর 5 ফুট পথ অতিক্রম করে তাহা হইলে গোলার উপর বারুদের গ্যাসের গড় চাপ টন ভারে নির্ণয় কর। [প্রাক্-ইঞ্জিনিয়ারিং 1966]

পরীক্ষাপত্র

1. নিউটনের গতিসূত্রগুলি বর্ণনা কর?
2. নিউটনের গতির দ্বিতীয় সূত্র বর্ণনা কর। $P=mf$ সূত্র প্রমাণ কর।
3. ভরবেগের সংজ্ঞা দাও। 20 পা. ভরের বস্তু অবাধভাবে 100 ফুট পতিত হইলে কত ভরবেগ উৎপাদিত হয়?
4. পাউণ্ডাল এবং পাউণ্ড ভারের পার্থক্য বুঝাইয়া দাও।
5. গ্রাম-ভার এবং ডাইনের সম্বন্ধ নিরূপণ কর।
6. বলের গতীয় বা পরম একক এবং স্থিতীয় বা মহাকর্ষীয় এককের মধ্যে পার্থক্য ব্যাখ্যা কর।
7. বলের প্রাকৃতিক স্বাধীনতা তত্ত্ব ব্যাখ্যা কর।
8. একটি রেলগাড়ীর ভার 200 টন; প্রতি টনে 10 পা. ভার বাধা অতিক্রম করিয়া ইহা 10 সেকেণ্ড সময়ে ঘণ্টায় 30 মাইল বেগ অর্জন করে। এঞ্জিনের (টান সম ধরিলে) টান নিরূপণ কর। [ক. বি. 1961]
9. x গ্রাম ভার বল m গ্রাম ভরের বস্তুকে স্থিরাবস্থা হইতে t সেকেণ্ড সময়ে কতদূর লইয়া যাইবে?
10. 10 পা. ভার বল 10 পাউণ্ড ভরের বস্তুর উপর 10 সেকেণ্ড সময় ক্রিয়া করিলে কত ভরবেগ উৎপাদিত হইবে?

নবম পরিচ্ছেদ | ঘাত—ভরবেগের নিত্যতা Impulse of force—Conservation of Linear Momentum

9-1. সংজ্ঞা: বল ও তাহার কার্যকালের গুণফলকে ঘাত (Impulse) বলে।

$$\text{ঘাত} = P.t$$

বলের পরিবর্তন না হইলে বল-জনিত ত্বরণ সম এবং $P = mf$

$\therefore \quad Pt = mf.t = m\,(v - u), \qquad [\because \; v = u + ft]$

$\qquad = mv - mu$

অর্থাৎ, **ঘাত = ভরবেগের পরিবর্তন।**

দেখাইতে পারা যায় যে বল পরিবর্তিত হইলেও

ঘাত = ভরবেগের পরিবর্তন

*** 9-2. ঘাতকারী বল** (Impulsive Force) **:**

একটি প্রকাণ্ড বল অতি অল্প সময়ের জন্য ক্রিয়া করিলে তাহাকে ঘাতকারী বল (Impulsive Force) **বলে।**

ঘাতকারী বলের সমস্ত ক্রিয়ার পরিমাপ হয় তাহার ভরবেগের দ্বারা।

কামার যখন হাতুড়ি দিয়া লোহা পিটায়, হাতুড়ি অতি অল্প সময়ের জন্য লোহার সংস্পর্শে থাকে। যে বল লোহাতে প্রয়োগ করা হইল তাহা ঘাতকারী বল।

ক্রিকেট খেলোয়াড় যখন ব্যাট দিয়া জোরে কন্দুকে আঘাত করে, ব্যাট ও কন্দুক অতি সামান্য সময়ের জন্য সংস্পর্শে থাকে। কন্দুকে যে বল প্রয়োগ করা হইল তাহা ঘাতকারী বল।

উদাহরণ :

1. 10 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুর বেগ $\frac{1}{100}$ সেকেণ্ড সময়ে সেকেণ্ডে 12 ফুট হইতে সেকেণ্ডে 16 ফুটে পরিবর্তিত হয়। (i) ঘাতের মান এবং (ii) বলের মান নির্ণয় কর।

এখানে $m = 10$ পাউণ্ড, $u = 12$ ফু./সে., $v = 16$ ফু./সে., $t = \frac{1}{100}$ সেকেণ্ড।

ঘাত এবং বল P নির্ণয় করিতে হইবে।

ঘাত $= m\,(v-u) = 10\,(16-12) = 10\times 4 = 40$ একক।

এখন যেহেতু ঘাত $= Pt$

$\therefore\ 40 = P\times\frac{1}{100}$

$\therefore\ P = 40\times 100 = 4000$ পাউণ্ডাল

$= \frac{4000}{32} = 125$ পাউণ্ড-ভার।

2. স্থিরাবস্থায় স্থিত 8 আউন্স ভরের একটি বস্তুকে আঘাত করাতে ইহা সেকেণ্ড 15 ফুট বেগে যাত্রা করে। যদি আঘাত $\frac{1}{100}$ সেকেণ্ড স্থায়ী হয় বস্তুটির উপর গড়ে কি পরিমাণ বল ক্রিয়া করে ?

$m = 8$ আউন্স $= \frac{1}{2}$ পাউণ্ড ; ধর, নির্ণেয় বল P

$Pt =$ ঘাত $= m(v-u)$. এখানে $u=0$, $v=15$ ফু./সে.

$\therefore\ P\times\frac{1}{100} = \frac{1}{2}\times 15$ অথবা $P = \frac{1}{2}\times 15\times 100 = 750$ পাউণ্ডাল।

3. 1 আউন্স ভরের একটি স্ফটিকের মার্বল 16 ফুট উচ্চতা হইতে পতিত হয় এবং মেঝেতে পড়িয়া 9 ফুট উপরে উঠে ; ঘাত নির্ণয় কর। যদি মার্বল $\frac{1}{15}$ সেকেণ্ড সময় মেঝের সংস্পর্শে থাকে তাহা হইলে মেঝে ও মার্বলের মধ্যে গড়ে কি বল ক্রিয়া করে ?

মেঝেতে পড়িবার সময় বেগ $(u) = \sqrt{2g\times 16} = \sqrt{2\times 32\times 16} = 32$ ফু./সে.

মেঝে পরিত্যাগ করিবার সময় বেগ $(v) = \sqrt{2g\times 9} = \sqrt{2\times 32\times 9}$

$= 24$ ফু./সে.

[v উর্ধ্বাভিমুখে এবং u নিম্নাভিমুখে, v ধনাত্মক এবং u ঋণাত্মক]

$m = 1$ আউন্স $= \frac{1}{16}$ পাউণ্ড।

এখন, ঘাত $= m(v-u) = \frac{1}{16}\,[\,24-(-32)] = \frac{1}{16}\times 56 = \frac{7}{2}$ একক

ধর, মেঝে ও মার্বলের মধ্যে গড় বল R, তাহা হইলে মার্বলের উপর লব্ধি বল $= R-$ মার্বলের ভার

$\therefore\ (R-\frac{1}{16}\times 32)\frac{1}{15} =$ ঘাত $= \frac{7}{2}$

অথবা, $R-2 = \dfrac{7\times 15}{2} = \dfrac{105}{2} = \dfrac{105}{2} = 52\frac{1}{2}$ পাউণ্ডাল

$\therefore\ R = 52\frac{1}{2}+2 = 54\frac{1}{2}$ পাউণ্ডাল

[**মন্তব্য :** ধর, ঘাতজ বল P ; তাহা হইলে $P\times\frac{1}{15} = \frac{7}{2}$

$P = \frac{105}{2} = 52\frac{1}{2}$ পাউণ্ডাল ; বস্তুর ভার $= \frac{1}{16}\times 32 = 2$ পাউণ্ডাল।

মোট বল $= 52\frac{1}{2}+2 = 54\frac{1}{2}$ পাউণ্ডাল। ঘাতজ বল বস্তুর ভারের বহুগুণ বেশি।]

অনুশীলনী :

1. 900 গ্রাম ভরের একটি বস্তুর উপর একটি বল প্রয়োগ করাতে বস্তুর বেগ মিনিটে 30 মিটার হইতে মিনিটে 45 মিটারে পরিবর্তিত হয়। বলের ঘাত নির্ণয় কর। [উত্তর : 22500 সি. জি. এস্. একক।]

2. একটি ক্রিকেট খেলার কন্দুকের ভর $5\frac{1}{2}$ আউন্স, ইহা 20 ফু./সে. বেগে খেলোয়াড়ের ব্যাটে আসিয়া পড়ে এবং ইহাকে সোজা বিপরীতমুখে 60 ফু./সে. বেগে ফিরান হয়। আঘাতের ঘাত নির্ণয় কর। যদি কন্দুক $\frac{1}{10}$ সেকেণ্ড ব্যাটের সংস্পর্শে থাকে তাহা হইলে তাহাদের মধ্যে গড় বল নির্ণয় কর।

[উত্তর : $27\frac{1}{2}$ ফু. পা. সে. একক ; $8\frac{19}{32}$ পা. ভার।]

9-3. ভরবেগের নিত্যতা (Conservation of Linear Momentum) :

দুই বস্তুর মধ্যে পরস্পরের ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া ব্যতীত অন্য কোন বল ক্রিয়া না করিলে (কিংবা বাহিরের প্রযুক্ত বলের বিশ্লেষিতাংশ যদি কোন দিকে 0 [শূন্য] হয় সেদিকে) ভরবেগের সমষ্টি সর্বদা এক।

মনে কর, একটি কণা আর একটি কণার উপর গিয়া পড়িল ; প্রথম কণার ভর m_1 এবং দ্বিতীয় কণার ভর m_2, ধাক্কার আগে তাহাদের বেগ যথাক্রমে u_1 এবং u_2 ; ধাক্কার পরে বেগ v_1 এবং v_2। প্রথম কণার উপর দ্বিতীয় কণার ক্রিয়া P_1 এবং দ্বিতীয় কণার উপর প্রথম কণার প্রতিক্রিয়া P_2, আরও মনে কর, দুইটি কণা t-সময়ের জন্য পরস্পরের সংস্পর্শে থাকে।

নিউটনের তৃতীয় সূত্র অনুসারে, ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া সমান এবং বিপরীতমুখী

$$\therefore \quad P_1 = -P_2$$

এবং $P_1 t = -P_2 t$.

অর্থাৎ প্রথম কণার ঘাত = − দ্বিতীয় কণার ঘাত,

অর্থাৎ $m_1(v_1 - u_1) = -m_2(v_2 - u_2)$;

$$\therefore \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

ধাক্কার পরে ভরবেগের সমষ্টি = ধাক্কার পূর্বে ভরবেগের সমষ্টি।

***9-4. ব্যাপকভাবে ভরবেগের নিত্যতা :**

আমরা দুইটি কণার ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়া-জনিত গতির বেলায় ভরবেগের নিত্যতা দেখিলাম, কিন্তু ইহা আরও ব্যাপকভাবে কণাসমষ্টির উপর প্রযোজ্য। ব্যাপকভাবে ভরবেগের নিত্যতা নিম্নরূপে বর্ণনা করা যায় :—

কোন বস্তু বা কণাসমষ্টির উপর বাহির হইতে প্রযুক্ত বলসমূহের বিশ্লেষিতাংশের সমষ্টি কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল দিকে যদি শূন্য হয় তাহা হইলে ঐদিকে ভরবেগের সমষ্টি সর্বদাই এক।

প্রমাণ: মনে কর, m_1, m_2, m_3 কণাসমূহের ভর
কোন এক মুহূর্তে $u_1, u_2, u_3 \cdots$ যথাক্রমে ইহাদের বেগ
এবং t সময় পরে বেগ $v_1, v_2, v_3 \cdots\cdots$

এখন কণাসমূহের উপর কি কি বলের ক্রিয়া হইতেছে দেখ—

(1) বাহির হইতে প্রযুক্ত বলসমূহ যাহাদের বিশ্লেষিতাংশের সমষ্টি নির্দিষ্ট রেখার সমান্তরাল দিকে শূন্য।

(2) কণাসমূহের পরস্পরের ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া ;—নিউটনের তৃতীয় গতি-সূত্র অনুসারে ইহারা সাম্যাবস্থায়।

অতএব নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্র অনুসারে—

এইদিকে ভরবেগসমূহের পরিবর্তনের সমষ্টি শূন্য

অর্থাৎ $m_1(v_1-u_1)+m_2(v_2-u_2)+m_3(v_3-u_3)+\cdots\cdots=0.$

$\therefore \quad m_1v_1+m_2v_2+m_3v_3+\cdots=m_1u_1+m_2u_2+m_3u_3+\cdots$

অতএব কণাসমূহের ভরবেগের সমষ্টি অপরিবর্তিত থাকে।

9·5. গোলা ও কামানের গতি :

যখন বন্দুক বা কামান হইতে গুলি বা গোলা ছোঁড়া হয়, তখন বারুদের বিস্ফোরণহেতু অত্যধিক চাপযুক্ত গ্যাস উৎপাদিত হয়। গোলা বাহির হইয়া পড়িবার পূর্বক্ষণ পর্যন্ত গ্যাসের জন্য গোলার উপর সম্মুখের দিকে যেই চাপ পড়ে, কামানের উপর বিপরীতদিকে সেই সমান চাপ পড়ে। সুতরাং গোলার উপর এই বলের ঘাত (Impulse) বন্দুকের উপর ঘাতের সমান এবং বিপরীতমুখী। অতএব, গোলাতে যেই ভরবেগ উৎপাদিত হয় তাহা কামানে উৎপাদিত ভরবেগের সমান ও বিপরীতমুখী। যেই মুহূর্তে গোলা বাহির হইয়া পড়ে তখন সম্মুখের দিকে আর বল নাই কিন্তু পিছনের দিকে বল রহিয়াছে বলিয়া কামানের পশ্চাদপসরণ হয়।

মনে কর, কামানের ভর M এবং গোলার ভর m
তাহাদের বেগ যথাক্রমে V এবং v
যেহেতু কামানের ঘাত গোলার ঘাতের সমান ও বিপরীত

$\therefore \quad M(V-0)=m(v-0)$ অর্থাৎ $MV=mv$

কামানের ভর × কামানের বেগ = গোলার ভর × গোলার বেগ।

$$\frac{\text{কামানের পশ্চাৎমুখী বেগ}}{\text{গোলার বেগ}} = \frac{\text{গোলার ভর}}{\text{কামানের ভর}}$$

9·6. উদাহরণ :

1. যদি 75 টন ভরের একটি কামান হইতে 700 পাউণ্ড ভরের একটি গোলা সেকেণ্ডে 960 ফুট বেগে ছোঁড়া হয়, তাহা হইলে কামানের পশ্চাদপসরণে বেগ নির্ণয় কর।

কামানের ভর = 75 টন = 75 × 2240 পাউণ্ড।

কামানের ভর × কামানের বেগ = গোলার ভর × গোলার বেগ

$\therefore \quad 75 \times 2240 V = 700 \times 960$

$$V = \frac{\overset{100}{\cancel{700}} \times 960}{75 \times \underset{32}{\cancel{2240}}} = \frac{\overset{300}{\cancel{9600}}}{75 \times \underset{1}{\cancel{32}}} = 4$$

কামানের বেগ = সেকেণ্ডে 4 ফুট।

2. 5 পাউণ্ড ভরের একটি গোলক সেকেণ্ডে 8 ফুট বেগে যাইতেছিল; 2 পাউণ্ড ভরের অন্য একটি গোলক একই দিকে সেকেণ্ডে 10 ফুট বেগে আসিয়া ধাক্কা দেয়। ফলে দ্বিতীয় গোলকটি থামিয়া পড়ে। এখন প্রথম গোলকটি কত বেগে যাইবে?

মনে কর, নির্ণেয় বেগ v_1

যেহেতু ধাক্কার পর ভরবেগের সমষ্টি = ধাক্কার পূর্বে ভরবেগের সমষ্টি

$5v_1 + 2 \times 0 = 5 \times 8 + 2 \times 10$;

অর্থাৎ $5v_1 = 40 + 20 = 60$

$\therefore \quad v_1 = 12$

ধাক্কার পর প্রথম বস্তুর বেগ সেকেণ্ডে 12 ফুট।

3. 5 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু সেকেণ্ডে 12 ফুট বেগে গিয়া একই দিকে সেকেণ্ডে 5 ফুট বেগে ধাবমান 2 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুর উপর ধাক্কা দেয় এবং উভয়ে মিলিয়া যায়। সংযুক্ত বস্তুর বেগ নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় বেগ v.

যেহেতু ভরবেগের সমষ্টি সর্বদাই সমান,

$\therefore \quad (5+2)v = 5 \times 12 + 2 \times 5 = 60 + 10 = 70$

$\therefore \quad v =$ সেকেণ্ডে 10 ফুট।

4. উপরের উদাহরণে যদি দ্বিতীয় বস্তুটি বিপরীত দিকে সেকেণ্ডে 5 ফুট বেগে যাইত তাহা হইলে বেগ কত হইত?

[এই ক্ষেত্রে প্রথম বস্তুর ভরবেগ 5×12, দ্বিতীয় বস্তুর ভরবেগ -2×5]

$(5+2)\,v=5\times12-2\times5=60-10=50$

$\therefore\quad v=\frac{50}{7}=7\frac{1}{7}$ ফুট প্রতি সেকেণ্ডে।

প্রশ্নমালা 9

1. 32 পাউণ্ড ভরের একটি গোলা 8 টন ভরের একটি কামান হইতে সেকেণ্ডে 1120 ফুট বেগে ছোঁড়া হইল। কামানের পশ্চাদপসরণ বেগ নির্ণয় কর।

2 2 গ্রাম ভরের একটি গুলি এক কিলোগ্রাম ভরের একটি বন্দুক হইতে সেকেণ্ডে 300 মিটার বেগে বাহির হইল। বন্দুকের পশ্চাদপসরণ বেগ নির্ণয় কর।

3. 700 পাউণ্ড ভরের একটি গোলা 35 টন ভরের একটি কামান হইতে সেকেণ্ডে 1120 ফুট বেগে ছোঁড়া হইল। কামানের পশ্চাদপসরণ বেগ নির্ণয় কর। যদি 3,920,000 পাউণ্ডাল বল প্রয়োগ করিয়া কামানের পশ্চাদপসরণে বাধা দেওয়া হয় তাহা হইলে কামান কতদূর গিয়া থামিয়া যাইবে?

4. 180 পাউণ্ড ভরের গোলা 12 টনের কামান হইতে 1260 ফু./সে. বেগে ছোড়া হইয়াছে। সমভাবে কি চাপ প্রয়োগ করিলে 6 ফুট পশ্চাদপসরণ করিয়া কামানটি থামিয়া যাইবে?

5. 700 পাউণ্ড ভরের গোলা 38 টনের কামান হইতে সেকেণ্ডে 1700 ফুট বেগে ছাড়া হয়। যদি কামানের পশ্চাদপসরণ 17 টন ভার বল প্রয়োগ করিয়া বাধা দেওয়া হয় তাহা হইলে কত ফুট পিছু সরিয়া কামান থামিয়া যাইবে?

6. একটি কামানের মুখ হইতে সেকেণ্ডে 2000 ফুট বেগে 800 পাউণ্ড ভারের গোলা বহির্গত হয়। কামানের পশ্চাদপসরণ একটি সম বল প্রয়োগ করিয়া $\frac{1}{8}$ সেকেণ্ডে থামান হয়। বল নির্ণয় কর।

7. 10 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু সেকেণ্ডে 8 ফুট বেগে ছুটিয়া একই দিকে গতিশীল সেকেণ্ডে 3 ফুট বেগে ধাবমান 15 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুর উপরে গিয়া পড়িল। ঘাতের পর যদি তাহারা একই বেগে চলে তাহা হইলে এই বেগের মান নির্ণয় কর।

8. দুইটি বস্তুর ভর 5 গ্রাম এবং 20 গ্রাম। তাহারা সেকেণ্ডে 200 সেন্টিমিটার এবং 25 সেন্টিমিটার বেগে ছুটিয়া বিপরীত দিক হইতে একে অন্যের উপর আসিয়া পড়িল এবং মিলিয়া গেল। এই সম্মিলিত বস্তুর বেগ নির্ণয় কর।

9. 4 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু সেকেণ্ডে 5 ফুট বেগে গিয়া সেকেণ্ডে 10 ফুট বেগে একই দিকে ধাবমান 6 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুর উপর পড়িল। ধাক্কার পরে তাহারা যদি মিলিয়া যায় তাহা হইলে মিলিত বস্তু কত বেগে যাইবে?

10 8 টন ভরের একটি মালগাড়ী সেকেণ্ডে 12 ফুট বেগে গিয়া স্থিরাবস্থায় স্থিত অপর একটি মালগাড়ীর উপর ধাক্কা দেয় এবং উভয়ে এক সঙ্গে সেকেণ্ডে 8 ফুট বেগে চলিতে থাকে। দ্বিতীয় মালগাড়ীর ভর নির্ণয় কর।

11. সেকেণ্ডে 8 ফুট বেগে ধাবমান একটি 6 পাউণ্ড ভরের গোলক সেকেণ্ডে 3 ফুট বেগে একই দিকে ধাবমান 4 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুর উপর গিয়া পড়ে এবং উভয়ে মিলিত ভাবে ছুটিতে থাকে। ধাক্কার পর বেগ নির্ণয় কর।

যদি ইহারা বিপরীত দিক হইতে একে অন্যের উপর আসিয়া পড়িত তাহা হইলে সম্মিলিত বস্তুর বেগ কত হইত?

12. একটি বস্তু তাহার দ্বিগুণ ভরের স্থিরাবস্থায় স্থিত একটা বস্তুর উপর গিয়া ধাক্কা দেয়। যদি ধাক্কার পর দুইটি বস্তু মিলিতভাবে চলে দেখাও যে, যে বস্তু ধাক্কা দিল উহা বেগের $\frac{2}{3}$ হারায়।

13. একটি বোমা স্থিরাবস্থায় থাকিয়া দুই ভাগে ফাটিল। ছোট অংশ সমস্তের $\frac{1}{n}$। দুই অংশের প্রারম্ভিক বেগ নির্ণয় কর।

14. M ভরের বন্দুক হইতে m ভরের গুলি v বেগে নির্গত হইল। (i) যদি বন্দুকের পশ্চাদপসরণ P বলের দ্বারা ব্যাহত করা হয় এবং বন্দুক থামিবার পূর্বে s পরিমাণ দূরত্ব পিছনের দিকে সরে দেখাও যে
$$P=\frac{m^2v^2}{2Ms};$$

(ii) যদি বন্দুকের পশ্চাদপসরণ P বলের দ্বারা ব্যাহত হয় এবং t সময়ে বন্দুক থামে দেখাও যে
$$P=\frac{mv}{t}.$$

15. একটি লম্বা দড়ির এক প্রান্ত একটি কপির উপর দিয়া গিয়াছে এবং উহাতে M পাউণ্ড বাঁধা হইয়াছে। অন্য প্রান্তে m পা. ভরের একটি বস্তু বাঁধা হইয়াছে ($m<M$)। M ভরের বস্তুটি অবাধভাবে t সেকেণ্ড পড়িবার পর দড়িটি টানটান হইয়া m ভরের বস্তুটিকে উঠাইতে থাকে। কি বেগ লইয়া m ভরের বস্তুটি উঠিতে আরম্ভ করে?

যদি M ভরের বস্তু 'h' ফুট পড়িবার পর দড়িটি টান টান হইয়া mকে উঠাইতে থাকে তাহা হইলে বেগ নির্ণয় কর।

[সংকেত : t সেকেণ্ড পরে M-এর বেগ $v=gt$.

ভরবেগের নিত্যতা হেতু $(M+m)V=Mv=Mgt$.

$$\therefore \quad V=\frac{Mgt}{M+m}.$$

(ii) দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $(M+m)V=M\sqrt{2gh}$.

দশম পরিচ্ছেদ

কার্য, শক্তি ও ক্ষমতা
Work, Energy and Power

[কার্য—Work ; শক্তি—Energy ; ক্ষমতা—Power ;
স্থৈতিক—Potential ; গতীয়—Kinetic.]

10-1. কার্য : বল যে অভিমুখে ক্রিয়া করে সেই দিকে যদি বলের প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ হয়, তাহা হইলে বলা হয় যে বলটি কার্য করে।

যখন বলের প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ বলের বিপরীত অভিমুখে হয়, তখন বলের বিরুদ্ধে কার্য করা হয়।

(1) যখন কোন বস্তু পৃথিবীর দিকে পড়ে তখন বস্তুর ভার কার্য করে। যখন কোন বস্তুকে উত্তোলন করা হয় তখন ভারের বিরুদ্ধে কার্য করা হয়।

(2) এঞ্জিনের টানে যখন গাড়ি চলে তখন এঞ্জিনের টান (pull) কার্য করে। যখন ব্রেক কষিয়া গাড়ি থামানো হয় তখন ব্রেক কষিয়া যে-বল প্রয়োগ করা হয় তাহার বিরুদ্ধে কার্য করা হয়, কারণ ব্রেকের বাধা গাড়ির গতির বিপরীত দিকে।

আবার দেখ, তুমি একটি দেওয়ালে জোরে ধাক্কা দিতে দিতে শ্রান্ত হইয়া পড়িলে। দেওয়াল একটুও সরিল না বলিয়া তুমি যত বলই প্রয়োগ কর না কেন, কোন কার্যই করা হইল না।

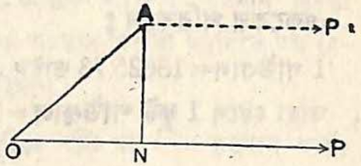
10-2. সংজ্ঞা : বল ও বলের অভিমুখে তাহার প্রয়োগ-বিন্দুর সরণের গুণফল দ্বারা কার্যের পরিমাপ হয়।

এই পরিচ্ছেদে আমরা প্রধানতঃ বলের ক্রিয়া-রেখা বরাবর তাহার প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ আলোচনা করিব। বল যেদিকে ক্রিয়া করে সেদিকে তাহার প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ হইলে কার্য ধনাত্মক, বিপরীত দিকে সরণ হইলে কার্য ঋণাত্মক। অতএব বলের বিরুদ্ধে কার্য ঋণাত্মক।

কার্য = বল × বলের অভিমুখে তাহার প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ

[যদি সরণ বলের ক্রিয়া-রেখা বরাবর না হয়, যেমন প্রদত্ত চিত্রে বলের প্রযোগবিন্দু O এবং ঐ প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ OA, তাহা হইলে A বিন্দু হইতে বলের ক্রিয়া-রেখার উপর AN লম্ব অঙ্কিত

করিয়া বলের অভিমুখে সরণ হয় ON এবং কার্য $=P.ON=$ বল $\times$ বলের ক্রিয়া-রেখা বরাবর সরণের বিশ্লেষিতাংশ। লক্ষ্য কর যে OA যদি P-এর লম্বাভিমুখে হয় তখন N বিন্দু O বিন্দুর সহিত মিলিত হয়। সুতরাং বলের ক্রিয়া-রেখা বরাবর সরণের বিশ্লেষিতাংশ '0' (শূন্য) এবং কার্য $=P\times 0=0$। যখন অনুভূমিক সমতলে



একটি বস্তু টানিয়া নেওয়া হয় তখন ভারের বিরুদ্ধে কোন কার্য করা হয় না। একজন লোক যখন কোন বোঝা বহন করে সে ভারের বিরুদ্ধে কোন কার্য করে না। বোঝাটি মাটি হইতে উঠাইবার সময় মাত্র সে কার্য করিয়াছিল।)

10-3. কার্যের একক (Unit of work): একক পরিমাণ বলের প্রয়োগে, বলের দিকে তাহার প্রয়োগ-বিন্দুর একক পরিমাণ সরণে যে-কার্য হয়, তাহাকে কার্যের একক গ্রহণ করা হয়।

(1) **গতীয় একক** (Dynamical or Absolute unit):

এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে এক পাউণ্ডাল বলের প্রয়োগে বলের দিকে তাহার প্রয়োগ-বিন্দুর এক ফুট সরণ হইলে যে-কার্য সাধিত হয় তাহা একক কার্য; ইহার নাম **ফুট-পাউণ্ডাল** (Foot-Poundal)।

সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে এক ডাইন (Dyne) বলের প্রয়োগে বলের দিকে তাহার প্রয়োগ-বিন্দুর এক সেন্টিমিটার সরণে যে-কার্য সাধিত হয় তাহা একক কার্য; ইহার নাম **আর্গ** (Erg)।

(2) **স্থিতীয়** বা **মহাকর্ষীয় একক** (Statical or Gravitational unit)।

এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে এক পাউণ্ড-ভার বলের প্রয়োগে বলের দিকে তাহার প্রয়োগ-বিন্দুর এক ফুট সরণে যে-কার্য সাধিত হয় তাহা একক কার্য; ইহার নাম **'ফুট পাউণ্ড'** (Foot-Pound)।

1 ফুট-পাউণ্ড $=g$ ফুট-পাউণ্ডাল $=32$ ফুট-পাউণ্ডাল (স্থূলমান)।

সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে এক গ্রাম-ভার বলের প্রয়োগে বলের দিকে তাহার প্রয়োগ-বিন্দুর এক সেন্টিমিটার সরণে যে-কার্য সাধিত হয় তাহা একক কার্য; ইহার নাম **গ্রাম-সেন্টিমিটার** (Gramme-centimetre)।

1 গ্রাম সেন্টিমিটার $=g$ আর্গ $=980$ আর্গ (স্থূলমান)।

সি. জি. এস্. ব্যবহারিক একক (Practical unit): জুল (Joule)।

কার্যের সি. জি. এস্. গতীয় একক অতি ক্ষুদ্র বলিয়া ব্যবহারের নিমিত্ত একটি বড় একক গ্রহণ করা হয়; ইহার নাম জুল (Joule)।

1 জুল $=10^7$ আর্গ (এক কোটি আর্গ)

এককের পরিবর্তন ঃ

1 পাউণ্ডাল $=13825{\cdot}73$ ডাইন এবং 1 ফুট $=30{\cdot}48$ সেন্টিমিটার

তাহা হইলে **1 ফুট পাউণ্ডাল** $=1$ পাউণ্ডাল $\times 1$ ফুট

$=13825{\cdot}73$ ডাইন $\times 30{\cdot}48$ সে. মি.

$=421408{\cdot}2504$ আর্গ

$=421400$ **আর্গ** (স্থূলমান)

1 ফুট পাউণ্ড $=\dfrac{421400\times 32}{10^7}=1{\cdot}348$ জুল (প্রায়)

10-4. উদাহরণ ঃ

(1) 20 পাউণ্ড ভরের বস্তুকে 4 ফু./সে.^{2} সমত্বরণে 5 ফুট সরাইতে কি পরিমাণ কার্য করিতে হয় ?

প্রযুক্ত বল $=$ ভর $\times$ ত্বরণ $=20\times 4=80$ পাউণ্ডাল

কার্য $=$ বল $\times$ সরণ $=80\times 5=400$ ফুট-পাউণ্ডাল।

(2) 1000 ডাইন বলের প্রয়োগে বলের প্রয়োগ-বিন্দুর 10 সে. মি. সরণ হইলে কি পরিমাণ কার্য সাধিত হয় ?

কার্য $=1000\times 10=10{,}000$ আর্গ

(3) 8 স্টোন ভারের একজন লোক পাহাড়ের গা বাহিয়া 1000 ফুট উঁচুতে উঠিলে কত ফুট-পাউণ্ড কার্য করা হয় ?

ভার $=8$ স্টোন $=8\times 14=112$ পাউণ্ড

কৃত কার্য $=112\times 1000=112000$ ফুট-পাউণ্ড।

(4) এক কিলোগ্রাম ভরের বস্তু 10 মিটার উত্তোলিত হইলে কত কার্য করা হইবে ?

ভার $=1000g$ ডাইন ; সরণ $=10\times 100$ সে. মি.

কৃত কার্য $=$ ভারের বিরুদ্ধে কার্য

$=1000g\times 10\times 100$ আর্গ

$=10^6 g$ আর্গ $=10^6\times 980$ আর্গ

$=98\times 10^7$ আর্গ $=98$ জুল।

10-5. শক্তি (Energy) :

সংজ্ঞা ঃ কার্য করিবার সামর্থ্যকে শক্তি (Energy) বলে।

শক্তি দুই প্রকার ঃ **স্থৈতিক শক্তি** (Potential energy) এবং **গতীয়** বা **চল-শক্তি** (*Kinetic* energy)।

স্থৈতিক শক্তি (Potential Energy) : বস্তুর স্থিতি হেতু উহা যে-পরিমাণ কার্য করিতে সক্ষম তাহা ঐ বস্তুর **স্থৈতিক শক্তি**। বর্তমান অবস্থা হইতে প্রমাণ (standard) বা স্বাভাবিক অবস্থায় ফিরিয়া আসিতে বস্তু যে-পরিমাণ কার্য করে তাহা স্থৈতিক শক্তির পরিমাপ।

(1) ভূ-ভৃষ্ঠ হইতে উত্তোলিত বস্তুর স্থৈতিক শক্তি থাকে। বর্তমান অবস্থা হইতে ভূ-পৃষ্ঠে পড়িবার সময় ইহার ভার যে-কার্য করে তাহা স্থৈতিক শক্তির পরিমাপ।

(2) বাঁকানো ধনুর স্থৈতিক শক্তি থাকে। বাঁকানো অবস্থা হইতে স্বাভাবিক সোজা অবস্থায় ফিরিয়া আসিতে ইহা যে-পরিমাণ কার্য করে তাহা ইহার স্থৈতিক শক্তির পরিমাপ।

(3) ঘড়িতে দম দিলে স্প্রিং-এর স্থৈতিক শক্তি থাকে। স্প্রিং তাহার গুটানো অবস্থা হইতে স্বাভাবিক অবস্থায় ফিরিয়া আসিতে ঘড়ির কাঁটা ঘুরানোর কাজ করে।

10-6. প্রদত্ত ভরের একটি কণাকে কোন উচ্চতায় উঠাইলে তাহার স্থৈতিক শক্তি :

মনে কর, কণার ভর m এবং ইহা ভূপৃষ্ঠ হইতে উচ্চতায় আছে।

স্থৈতিক শক্তি = কণা ভূপৃষ্ঠে ফিরিয়া আসিবার সময় যে-কার্য করিতে পারে

= কণার ভার × ভারের দিকে সরণ

$$= mg \times h = mgh.$$

10-7. গতীয় শক্তি (Kinetic Energy) : বস্তু তাহার গতি হেতু যে-শক্তির অধিকারী হয় তাহা উহার গতীয় শক্তি। বস্তুটি স্থিরাবস্থায় আসিবার পূর্বে প্রযুক্ত বলের বিরুদ্ধে যে-পরিমাণ কার্য করিতে পারে তাহার দ্বারা গতীয় শক্তির পরিমাপ করা হয়।

পতনশীল বস্তু, দোলায়মান দোলক, ঘূর্ণ্যমান চাকা, গতিশীল বন্দুকের গুলি ইহাদের প্রত্যেকেই গতীয় শক্তির অধিকারী।

10-8. কোনও গতিশীল বস্তু গতীয় শক্তির পরিমাপ :

মনে কর, বস্তুর ভর m এবং তাহার বেগ v.

আরও মনে কর, P বল গতির বিপরীত দিকে ক্রিয়া করিয়া বস্তুটিকে স্থিরাবস্থায় আনয়ন করে এবং বস্তুর ত্বরণ $-f$

স্থিরাবস্থায় আসিবার পূর্বে বস্তুর সরণ x হইলে, $0=v^2-2fx$......(1)

গতীয় শক্তি= স্থিরাবস্থায় আসিবার পূর্বে বস্তুর দ্বারা কৃত কার্য

$=P$ বলের বিরুদ্ধে কৃত কার্য

$=P$ বল × তাহার বিপরীতমুখী সরণ

$=P\times x=mfx$

$=m\dfrac{v^2}{2}$ [সমীকরণ (1) হইতে fxএর মান $\dfrac{v^2}{2}$ স্থাপন করিয়া]

$\therefore$ **গতীয় শক্তি** $=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}$ **ভর বেগের বর্গ**

[**দ্রষ্টব্য ঃ** গতীয় গক্তির এই সূত্রে **একক** সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে **আর্গ** এবং এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে **ফুট-পাউণ্ডাল**।

এই সূত্রের প্রমাণে $P=mf$ সূত্র ব্যবহার করা হইয়াছে। সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে বল P ডাইন এবং এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে পাউণ্ডাল। সুতরাং কার্য $=Px$, প্রথম পদ্ধতিতে সেন্টিমিটার-ডাইন বা আর্গ এবং দ্বিতীয় পদ্ধতিতে ফুট-পাউণ্ডাল।

10-9. উদাহরণ ঃ

একটি 4 টন ভরের কামান হইতে 8 পাউণ্ড ভরের একটি গোলা অনুভূমিক দিকে সেকেণ্ডে 1120 ফুট বেগে নিক্ষিপ্ত হইল। কামানের গতীয় শক্তি নির্ণয় কর।

ধর, কামানের বেগ V

এখন, কামানের ভর × কামানের বেগ = গোলার ভর × গোলার বেগ

$\therefore\quad (4\times2240)\times V=8\times1120$

$V=1$ ফুট/সে.

কামানের গতীয় শক্তি $=\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}(4\times2240)\times1^2$

$=4480$ ফুট-পাউণ্ডাল।

10-10. কোনও কণার সরলপথে সমত্বরণে গতি হইলে গতীয় শক্তির বৃদ্ধি প্রযুক্ত বলের দ্বারা কৃত কার্যের সমান।

সমত্বরণে গতিতে $v^2=u^2+2fs$ $\therefore\ v^2-u^2=2fs.$

যদি গতিশীল বস্তুর ভর m এবং প্রযুক্ত বল P হয়, তাহা হইলে $P=mf$,

গতীয় শক্তির বৃদ্ধি $=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}m(v^2-u^2)=\frac{1}{2}m.2fs.$

$=mfs=Ps=$ প্রযুক্ত বলের দ্বারা কৃত কার্য

এই সমীকরণকে **কার্য-সমীকরণ** (Equation of work) বা **শক্তি-তত্ত্ব** (Principle of Energy) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত : যদি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করে তাহা হইলে উহা যে গতীয় শক্তি অর্জন করে তাহা প্রযুক্ত বলের দ্বারা কৃত কার্যের সমান ($\frac{1}{2}mv^2 = Ps$)।

এই প্রসঙ্গে আর একটি সমীকরণের উল্লেখ করিব।

আমরা জানি, $v = u + ft$ বা $v - u = ft$

$$\therefore \quad m(v-u) = mft$$

অথবা, $mv - mu = Pt$

ভরবেগের বৃদ্ধি = বল × সময়

ইহাকে **ভরবেগ সমীকরণ** (Equation of Momentum) বলে। উপরে পাইয়াছি

গতীয় শক্তির বৃদ্ধি = বল × সরণ

দ্রষ্টব্য : (1) ক্রিয়মাণ বলসমূহের বিরুদ্ধে কৃত কার্য = গতীয় শক্তির হ্রাস।

(2) সমত্বরণ না হইলেও এবং বক্র পথে গতি হইলেও কার্য সমীকরণ বা শক্তিতত্ত্ব সত্য। (প্রমাণ উচ্চগণিতের সাহায্যে করিতে হয়)।

10-11. উদাহরণ :

1. একটি আধ আউন্স ভরের গুলি একটি রাইফেলের মুখ হইতে সেকেণ্ডে 2000 ফুট বেগে নির্গত হয় ; রাইফেলের নলের দৈর্ঘ্য 2 ফুট। গুলির উপর ক্রিয়মাণ বল সম হইলে তাহার মান নির্ণয় কর। গুলি নলের মুখে আসিতে কত সময় লাগে ?

মনে কর, ক্রিয়মাণ বল P.

যেহেতু গতীয় শক্তির বৃদ্ধি = প্রযুক্ত বলের দ্বারা কৃত কার্য

$$\therefore \quad \frac{1}{2}mv^2 - 0 = P.s.$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2 \times 16} \times (2000)^2 = P.2$$

$$\therefore \quad P = \frac{2000 \times 2000}{8 \times 16} = 250 \times 125 = 31250 \text{ পাউণ্ডাল।}$$

আবার ভরবেগ সমীকরণ হইতে

ভরবেগের বৃদ্ধি = বল × সময়

$$mv - m \times 0 = Pt.$$

$$\frac{1}{2 \times 16} \times 2000 = 31250t$$

$$\therefore \quad t = \frac{1000}{16 \times 31250} = \frac{1}{500} \text{ সেকেণ্ড}$$

প্রকারান্তর ঃ

$v^2 = 2fs$ সূত্র হইতে $2000^2 = 2f.\,2.$

$$\therefore \quad f = \frac{2000 \times 2000}{4} = 1000 \times 1000$$

এখন $P = mf = \frac{1}{32} \times 1000 \times 1000 = 31250$ পাউণ্ডাল।

আবার $v = ft$ সূত্র হইতে $2000 = 1000 \times 1000t$

$\therefore \quad t = \frac{1}{500}$ সেকেণ্ড।

(2) 5 পাউণ্ড ভারের একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে 8 ফুট পতিত হইলে কত গতীয় শক্তি অর্জন করিবে? কি বল প্রয়োগ করিলে উহা 2 ফুট গিয়া থামিয়া যাইবে?

অর্জিত গতীয় শক্তি = অভিকর্ষ বলের দ্বারা কৃত কার্য

= 5 × 8 ফুট-পাউণ্ড = 40 ফুট-পাউণ্ড

[= 40 × 32 = 1280 ফুট-পাউণ্ডাল।]

যদি প্রযুক্ত বলের পরিমাণ P পাউণ্ড-ভার হয়, তাহা হইলে বস্তুর উপর P পাউণ্ড-ভার বল ঊর্ধ্বদিকে এবং 5 পাউণ্ড-ভার অধোদিকে ক্রিয়া করিতেছে।

ক্রিয়মাণ বলসমূহের বিরুদ্ধে কৃত কার্য = গতীয় শক্তির হ্রাস

$\therefore \quad (P-5) \times 2$ ফুট-পাউণ্ড = 40 ফুট-পাউণ্ড

$P - 5 = 20$ পাউণ্ড-ভার, $P = 25$ পাউণ্ড-ভার।

(3) 10 কিলোগ্রাম ভরের বস্তু এক মিটার পতিত হইলে কত গতীয় শক্তি অর্জিত হইবে?

ভর = 10 কিলোগ্রাম = 10 × 1000 গ্রাম,

বস্তুর ভার = 10,000 × 980 ডাইন

সরণ = 1 মিটার = 100 সেন্টিমিটার

কার্যতত্ত্ব হইতে

অর্জিত গতীয় শক্তি = বস্তুর ভারের দ্বারা কৃত কার্য

= ভার × সরণ

$= 9800000 \times 100$

$= 980{,}000{,}000$ আর্গ।

4. একজন শ্রমিক তাহার নিকট হইতে 12 ফুট উপরের রাজমিস্ত্রিকে ইট ছুঁড়িয়া দিতেছে; ইহা রাজমিস্ত্রির নিকট সেকেণ্ডে 12 ফুট বেগে পৌঁছে। যদি শ্রমিক ঠিক রাজমিস্ত্রিকে পৌঁছিতে পারে এই বেগে ইট ছুঁড়িত তাহা হইলে সে কত কার্য বাঁচাইতে পারিত?

12 ফুট উচ্চতায় উঠাইবার জন্য প্রয়োজনীয় কার্য

= ভারের বিরুদ্ধে কৃত কার্য $= mg.12 = 12m \times 32$ ফুট পাউণ্ডাল।

কিন্তু যে কার্য করা হইতেছে তাহার পরিমাণ $= mg \times 12 + \frac{1}{2}m \times 12^2$.

$= 12m(32+6) = 12m \times 33$ ফুট পাউণ্ডাল।

যে পরিমাণ কার্য বাঁচাইতে পারা যাইত তাহার পরিমাণ

$= \frac{1}{2}m \times 12^2 = 12m \times 6.$

$$\frac{\text{যে পরিমাণ কার্য বাঁচাইতে পারা যাইত}}{\text{কৃত কার্য}} = \frac{12m \times 6}{12m \times 38} = \frac{3}{19}$$

শ্রমিক যে পরিমাণ কার্য বাঁচাইতে পারিত তাহা কৃত কার্যের $\frac{3}{19}$

5. সমত্বরণে সরল পথে গতিশীল 100 গ্রাম ভরের একটি বস্তুর বেগ এক মিটার অতিক্রম করিয়া সেকেণ্ডে 10 সেন্টিমিটার হইতে 50 সেন্টিমিটারে পরিণত হইলে বস্তুর উপর কি বল ক্রিয়া করে?

$s = 1$ মিটার $= 100$ সেন্টিমিটার

মনে কর, প্রযুক্ত বল $= P$

প্রযুক্ত বলের দ্বারা কৃত কার্য = গতীয় শক্তির বৃদ্ধি

$\therefore \quad P \times 100 = \frac{1}{2} \times 100\ (50^2 - 10^2)$

সুতরাং $P = \frac{1}{2} \times (2500 - 100) = 1200$ ডাইন

$= \frac{1200}{980} = 1\frac{11}{49}$ গ্রাম-ভার।

দ্রষ্টব্য : $v^2 = u^2 + 2fs$ সূত্র সাহায্যে f নির্ণয় করিয়া $P = mf$ সূত্র দ্বারা বল নির্ণয় করিবার প্রক্রিয়া আমরা অবগত আছি।

কার্যতত্ত্ব $Ps = \frac{1}{2}m(v^2 - u^2)$ ব্যবহার করিয়া ইহা একেবারে পাওয়া গেল।

আশ্ব (Horse Power) এবং **ওয়াটের** (Watt) **সম্বন্ধ নির্ণয় ঃ**

10-3 অনুচ্ছেদে আমরা দেখিয়াছি, 1 ফুট-পাউণ্ডাল $= 421400$ আর্গ

এক আশ্ব বা অশ্বশক্তি (H. P.) = প্রতি সেকেণ্ডে 550 ফুট-পাউণ্ড কার্য করিবার ক্ষমতা

$= $ " " 550×32 ফুট-পাউণ্ডাল

$= $ " " $550 \times 32 \times 421400$ আর্গ

$= $ " " $\dfrac{550 \times 32 \times 421400}{10^7}$ ওয়াট

$= 746$ ওয়াট (স্থূলমান)।

এক কিলোওয়াট $= 1000$ ওয়াট $= \frac{1000}{746} = 1{\cdot}34$ অশ্বশক্তি (প্রায়)।

দ্রুত সম্বন্ধ নির্ণয়ের নিমিত্ত 1 অশ্বশক্তি $= 750$ ওয়াট গ্রহণ করা হয়।

$$1 \text{ H. P.} = \tfrac{750}{1000} \text{ K. W.} = \tfrac{3}{4} \text{ K. W.}$$ (স্থূলমান)

10-15. উপপাদ্য : কতকগুলি কণা এক অবস্থান হইতে ভিন্ন অবস্থানে উত্তোলিত হইয়াছে। যদি কণাসমূহের ভারের সমষ্টি W হয় এব তাহাদের ভারকেন্দ্র h পরিমাণ উত্তোলিত হয়, তাহা হইলে সম্পাদিত কার্যের পরিমাণ Wh.

মনে কর, কণাসমূহের ভার $W_1, W_2, W_3, \cdots W_n$; প্রথম অবস্থানে কোন নির্দিষ্ট অনুভূমিক তল হইতে ইহাদের উচ্চতা $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ এবং দ্বিতীয় অবস্থানে উচ্চতা $x_1', x_2', x_3', \cdots x_n'$.

কণাগুলির উপর সম্পাদিত কার্যের সমষ্টি

$$= W_1(x_1' - x_1) + W_2(x_2' - x_2) + W_3(x_3' - x_3) + \cdots + W_n(x_n' - x_n).$$

$$= (W_1x_1' + W_2x_2' + W_3x_3' + \cdots + W_nx_n') - (W_1x_1 + W_2x_2 + W_3x_3 + \cdots + W_nx_n).$$

এখন, প্রথম ও দ্বিতীয় অবস্থানে ভারকেন্দ্রের উচ্চতা $\bar{x}$ এবং $\bar{x}'$ হইলে

$$\bar{x} = \frac{W_1x_1 + W_2x_2 + \cdots + W_nx_n}{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}$$

$$= \frac{W_1x_1 + W_2x_2 + \cdots + W_nx_n}{W}$$

অনুরূপে $\bar{x}' = \dfrac{W_1x_1' + W_2x_2' + \cdots + W_nx_n'}{W}$

$\therefore$ কণাগুলির উপর সম্পাদিত কার্য $= W\bar{x}' - W\bar{x} = W(\bar{x}' - \bar{x}) = Wh.$

10-16. উদাহরণ :

1. একটি জলপূর্ণ কূপের ব্যাস 28 ফুট এবং গভীরতা 20 ফুট। একটি এঞ্জিনের সাহায্যে ইহার সমস্ত জল বাহির করিয়া কূপের মুখ হইতে 70 ফুট উচ্চে তোলা হয়। এই কার্য 48 মিনিটে সাধিত হইলে এঞ্জিন কত অশ্বশক্তিতে কার্য করে? (এক ঘনফুট জলের ভার $62\frac{1}{2}$ পাউণ্ড)।

কূপের ঘনমান $=\pi r^2 h=\frac{22}{7}\times 14^2\times 20$ ঘনফুট।

জলের ভার $(W)=\frac{22}{7}\times 196\times 20\times \frac{125}{2}$ পাউণ্ড-ভার।

জলের ভারকেন্দ্র যে পরিমাণ উত্থিত হইয়াছে তাহার মান (h)

$$=10+70=80 \text{ ফুট}$$

48 মিনিটে সাধিত কার্য $=\frac{22}{7}\times 196\times 20\times \frac{125}{2}\times 80$ ফুট-পাউণ্ড

$\therefore$ নির্ণেয় অশ্বশক্তি $=\dfrac{22\times 196\times 20\times 125\times 80}{7\times 2\times 48\times 60\times 550}$

$$=\frac{350}{9}=38\tfrac{8}{9}.$$

2. কোন পাহাড়িয়া স্টেশনে 5000 অশ্বশক্তির পাম্প সাহায্যে 4200 ফুট উঁচুতে তুলিয়া জল সরবরাহ করা হয়। পাম্পের কার্যোপযোগিতা (efficiency) শতকরা 92·4. যদি পাম্প অবিরাম কার্য করে, তাহা হইলে দৈনিক কত গ্যালন জল ব্যবহারের জন্য পাওয়া যাইবে? [গ্যালন = 10 পাউণ্ড].

[দ্রষ্টব্য : যন্ত্রে কিছু কার্য যন্ত্রের বাধা প্রভৃতি লঙ্ঘন করিতে অপব্যয় হয়। যন্ত্র সাহায্যে ভার উত্তোলন বা অন্য কার্য সাধন করিতে যে-কার্য পাওয়া যায় তাহা যন্ত্রের দ্বারা কৃত কার্যের একটা অংশ।]

মনে কর, দৈনিক x গ্যালন জল সরবরাহের জন্য উঠানো হয়।

তাহা হইলে দৈনিক সাধিত কার্যের পরিমাণ $=x\times 10\times 4200$ ফুট-পাউণ্ড

প্রতি সেকেণ্ডে সাধিত কার্য $=\dfrac{x\times 10\times 4200}{24\times 60\times 60}$ ফুট-পাউণ্ড ...(1)

প্রতি সেকেণ্ডে পাম্পের দ্বারা সাধিত সমগ্র কার্যের পরিমাণ

$$=5000\times 550 \text{ ফুট-পাউণ্ড।}$$

প্রতি সেকেণ্ডে জল উত্তোলনে ব্যবহৃত কার্য $=5000\times 550\times \dfrac{92\cdot 4}{100}$ ...(2)

(1) এবং (2) সমান

$$\therefore \quad \frac{x\times 10\times 4200}{24\times 60\times 60}=5000\times 550\times \frac{92\cdot 4}{100}$$

$$x=\frac{5000\times 550\times 92\cdot 4\times 24\times 60\times 60}{100\times 10\times 4200}=5227200 \text{ গ্যালন।}$$

10-17. শক্তির রূপান্তর এবং অপচয় (Transformation and Dissipation of Energy):

শক্তির বিনাশ নাই—রূপান্তর হয় মাত্র। বিশ্বে শক্তির পরিমাণ নির্দিষ্ট। তাপ, শব্দ, আলো, বিদ্যুৎ প্রভৃতি শক্তি পদার্থ-বিদ্যার চর্চার বিষয়। আধুনিক বিজ্ঞানের গোড়ার কথা শক্তির নিত্যতা। ইহা এইরূপে প্রকাশ করা যায়—

শক্তির সৃজনও করা যায় না, বিনাশও করা যায় না, কিন্তু এক শক্তিকে অন্য যে-কোন শক্তিতে রূপান্তরিত করা যায়।

778 ফুট-পাউণ্ড কার্য সম্পাদন করিয়া এক পাউণ্ড জলের তাপ এক ডিগ্রি ফারেনহাইট (Fahrenheit) বৃদ্ধি করা যায়। এই দুই শক্তি পরস্পর সমান।

যান্ত্রিক শক্তি স্থৈতিক এবং গতীয়। ইহাদের রূপান্তর আমরা দেখিয়াছি। কিন্তু স্থৈতিক ও গতীয় শক্তির যোগফল নির্দিষ্ট। উঁচু হইতে কোন বস্তু যখন মাটিতে পৌঁছে তখন ইহার স্থৈতিক শক্তি সমস্তটাই গতীয় শক্তিতে রূপান্তরিত হয়। মাটির সহিত বস্তুর সংঘাত হেতু এই গতীয় শক্তি তাপ শক্তিতে পরিবর্তিত হইয়া ছড়াইয়া পড়ে।

10-18. বিবিধ উদাহরণ:

1. একটি রেলগাড়ির বেগ ঘণ্টায় 45 মাইল। যদি এঞ্জিন এই গাড়ি টানিবার জন্য 1 টন ভারের বাধা অতিক্রম করে তাহা হইলে এঞ্জিনের আশ্ব বা অশ্বশক্তি কত?

ঘণ্টায় 45 মাইল = সেকেণ্ডে 66 ফুট।

1 টন ভার = 2240 পাউণ্ড-ভার।

এঞ্জিনের 1 সেকেণ্ডের কার্য = বাধার বিরুদ্ধে 1 সেকেণ্ডের কার্য
= 2240×66 ফুট-পাউণ্ড।

$\therefore$ নির্ণেয় আশ্ব বা অশ্বশক্তি $= \dfrac{2240 \times 66}{550} = 29{\cdot}88.$

2. একটি স্টীমারকে ঘণ্টায় $37\frac{1}{2}$ মাইল বেগে লইয়া যাইতে এঞ্জিন যদি 4000 অশ্বশক্তিতে কার্য করে, তাহা হইলে স্টীমারের গতিতে বাধা কত হইবে?

ঘণ্টায় $37\frac{1}{2}$ মাইল = সেকেণ্ডে 55 ফুট

মনে কর, গতিতে বাধা = P পাউণ্ড-ভার।

এঞ্জিনের 1 সেকেণ্ডের কার্য = বাধার বিরুদ্ধে 1 সেকেণ্ডের কার্য

$$4000 \times 550 = P \times 55$$

এবং $P = \frac{4000 \times 550}{55}$

$= 4000 \times 10 = 40000$ পাউণ্ড-ভার।

3. 206 টন ভারের একটি রেলগাড়ি 84তে 1 নতিবিশিষ্ট নততলে ঘণ্টায় 45 মাইল সমবেগে উঠিতেছে; যদি গাড়ির ভারের $\frac{3}{50}$ অংশের সমান বাধা সক্রিয় থাকে তবে এঞ্জিনের অশ্বশক্তি নির্ণয় কর। [ক. বি. 1936]

ঘণ্টায় 45 মাইল = সেকেণ্ডে 66 ফুট।

এঞ্জিনের দ্বারা প্রযুক্ত বল = তল বরাবর নিম্নাভিমুখে গাড়ির ভারের বিশ্লেষিতাংশ + বাধা

$$= 206 \times 2240 \times \tfrac{1}{84} + 206 \times 2240 \times \tfrac{3}{50} \text{ পাউণ্ড-ভার}$$

$$= 206 \times 2240 \left(\tfrac{1}{84} + \tfrac{3}{50}\right) \text{ পাউণ্ড-ভার}$$

$$= 206 \times 2240 \times \frac{151}{84 \times 25} \text{ পাউণ্ড-ভার}$$

$$\text{প্রতি সেকেণ্ডে কৃতকার্য} = \frac{206 \times 2240 \times 151 \times 66}{84 \times 25} \text{ ফুট-পাউণ্ড}$$

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় অশ্বশক্তি} = \frac{206 \times 2240 \times 151 \times 66}{84 \times 25 \times 550}$$

$$= \frac{206 \times 151 \times 6}{125} = 3981\tfrac{71}{125}$$

4. 200 টন ভরের একটি রেলগাড়ি $\frac{1}{4}$ ফু./সে^{2}. ত্বরণে চলিতেছে। যদি প্রতি টনে 10 পা-ভার বাধা ক্রিয়া করে তাহা হইলে এঞ্জিন কি পরিমাণ বল প্রয়োগ করে? যখন গাড়ির বেগ ঘণ্টায় 15 মাইল তখন এঞ্জিন কত অশ্বশক্তিতে কার্য করে? একই অশ্বশক্তিতে এবং একই বাধাতে ইহা সর্বাধিক কত বেগে যাইতে পারে?

মনে কর, এঞ্জিন P বল প্রয়োগ করে এবং বিপরীত দিকে F বাধা ক্রিয়া করে।

$$F = 10 \times 200 \text{ পা-ভার} = 2000 \times 32 \text{ পাউণ্ডাল}$$

এখানে $P - F = mf$.

$$P - 2000 \times 32 = 200 \times 2240 \times \tfrac{1}{4}$$

$$P = 2000 \times 32 + 50 \times 2240 \text{ পাউণ্ডাল}$$

$$= 2000 + \frac{50 \times 2240}{32} \text{ পাউণ্ড-ভার}$$

$$= 2000 + 3500 = 5500 \text{ পা-ভার।}$$

[লক্ষ্য কর: 2000 পা-ভার বল বাধা অতিক্রম করিবার জন্য প্রযুক্ত হয় এবং 3500 পা-ভার বল ত্বরণ উৎপাদন করে।]

এখন, ঘণ্টায় 15 মাইল বেগ = সেকেণ্ডে 22 ফুট বেগ

প্রতি সেকেণ্ডে কৃত কার্য = 5500×22 ফু. পা.

$\therefore$ এঞ্জিনের অশ্বশক্তি $= \dfrac{5500 \times 22}{550} = 220.$

বেগ যখন সর্বাধিক তখন ত্বরণ থাকে না। সুতরাং এঞ্জিনের দ্বারা প্রযুক্ত বল = বিপরীতমুখী বাধা = 2000 পা.-ভার।

গাড়ি যদি প্রতি সেকেণ্ডে v ফুট বেগে যায় তাহা হইলে প্রতি সেকেণ্ডে এঞ্জিনের দ্বারা কৃত কার্য = $2000v$.

$220 \times 550 = 2000v.$

$v = \dfrac{55}{20} \times 22$ ফু./সে.

$= \dfrac{55}{20} \times 15$ মাইল/ঘণ্টা [$\because$ 22 ফু./সে. = 15 মাইল/ঘণ্টা]

$= \dfrac{165}{4} = 41\frac{1}{4}$ মাইল/ঘণ্টা

5. 2 আউন্স ভরের একটি গুলি সেকেণ্ডে 900 ফুট বেগে একটি লক্ষ্য ভেদ করে। লক্ষ্যের ভর 10 পাউণ্ড এবং ইহা অবাধ গতিতে চলিতে সক্ষম। সংঘাত হেতু গতীয় শক্তির হানি নির্ণয় কর।

মনে কর, ঘাতের পর গুলিসহ লক্ষ্য V বেগে চলে

ভরবেগের নিত্যতা হইতে

$$\left(10 + \tfrac{2}{16}\right) V = \tfrac{2}{16} \times 900$$

$$\therefore \quad V = \frac{900}{8} \times \frac{8}{81} = \frac{100}{9} \text{ ফু./সে.}$$

লক্ষ্য ভেদ করিবার পূর্বে গতীয় শক্তি $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{16} \times 900 \times 900$ ফুট-পাউণ্ডাল

$= 81 \times 625$ ফুট-পাউণ্ডাল

লক্ষ্য ভেদের পর গতীয় শক্তি $= \frac{1}{2}\left(10 + \dfrac{2}{16}\right) \times \dfrac{100}{9} \times \dfrac{100}{9}$ ফুট-পাউণ্ডাল

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{81}{8} \times \dfrac{100}{9} \times \dfrac{100}{9}$ ফুট-পাউণ্ডাল

$= 625$ ফুট-পাউণ্ডাল

গতীয় শক্তির হানি $=81\times625-625=80\times625=50000$ ফুট-পাউণ্ডাল

$$=\frac{50000}{32}\text{ ফুট-পাউণ্ড}$$

$$=\frac{3125}{2}=1562\tfrac{1}{2}\text{ ফুট-পাউণ্ড।}$$

[লক্ষ্য কর যে ঘাতের জন্য ভরবেগের কোন হানি হয় না।

ঘাতের জন্য প্রত্যেক ক্ষেত্রেই গতীয় শক্তির হানি হয় এবং ইহা তাপ-শক্তিতে পরিবর্তিত হয়।]

প্রশ্নমালা 10

[1 হন্দর (1 Hundredweight) = 112 পাউণ্ড]

1. নিম্নলিখিত বলসমূহ প্রদত্ত সরণে কি পরিমাণ কার্য সাধন করিবে ?

   (i) 20 পাউণ্ডাল বল 60 ফুট সরণে
   (ii) 20 পাউণ্ড-ভার বল 3 ইঞ্চি সরণে
   (iii) 50 ডাইন বল 5 মিটার সরণে
   (iv) 8 গ্রাম-ভার বল 2 সেন্টিমিটার সরণে

2. এক টন ভরের বস্তুকে $\frac{1}{2}$ ফু./সে^{2}. ত্বরণে 10 গজ সরাইলে কত কার্য করা হয় ?

3. এক কিলোগ্রাম ভরের বস্তুকে 5 সে. মি./সে^{2} ত্বরণে 40 সেন্টিমিটার সরাইলে কত কার্য করা হয় ?

4. আধ পাউণ্ড ভরের একটি প্রস্তরখণ্ড স্থিরাবস্থা হইতে পড়িতে থাকিলে পতনের দশম সেকেণ্ডে অভিকর্ষ তাহার উপর কি পরিমাণ কার্য করে ?

5. 8 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তুকে সেকেণ্ডে 32 ফুট বেগে ঊর্ধ্বদিকে ছুঁড়িয়া দিলে (i) ছুঁড়িবার সময় গতীয় শক্তি কত ? (ii) আধ সেকেণ্ড পরে কত ? (iii) এক সেকেণ্ড পরে কত ?

6. একটি 2 হন্দর ভরের বস্তু সেকেণ্ডে 1 ফুট বেগে চলিতেছে। 2 আউন্স ভরের একটি গুলি যদি ইহার সমান গতীয় শক্তিবিশিষ্ট হয়, তাহা হইলে গুলির বেগ কত ?

7. একটি গুলির ভর 2 আউন্স ; যদি বন্দুকের মুখ হইতে ইহা সেকেণ্ডে 1200 ফুট বেগে নির্গত হয়, তাহা হইলে ইহার গতীয়-শক্তি কত ?

বন্দুকের নল যদি 3 ফুট দীর্ঘ হয়, তাহা হইলে বারুদের বিস্ফোরণ হেতু কত চাপ পড়িয়াছিল ?

8. 50 গ্রাম ভরের একটি বস্তু সেকেণ্ডে 16 সেন্টিমিটার বেগে ছুটিয়া সেকেণ্ডে 4 সেন্টিমিটার বেগে ধাবমান 40 গ্রাম ভরের আর একটি বস্তুকে ধরিয়া ফেলে ; তারপর যদি ইহারা যুক্ত অবস্থায় ছুটে তাহা হইলে ঘাতের পূর্বে এবং পরে গতীয়-শক্তির তুলনা কর।

9. একটি ইঞ্জিন প্রতি মিনিটে 10,000 পাউণ্ড জল 80 ফু./সে. বেগে প্রক্ষেপ করে, উহার অশ্বশক্তি নির্ণয় কর।

[**সংকেত :** প্রতি সেকেণ্ডে কৃত কার্য $=\frac{1}{2}\times\frac{10000}{60}\times 80^2$ ফুট-পাউণ্ডাল

$$=\frac{10000\times 80\times 80}{2\times 60\times 32}$$ ফুট-পাউণ্ড ; নির্ণেয় অশ্বশক্তি $=\frac{100000}{6\times 550}$

$$=\frac{1000}{33}=30\frac{10}{33}$$]

10. যে এঞ্জিন প্রতি মিনিটে 13200 পাউণ্ড জল 48 ফু./সে. বেগে প্রক্ষেপ করে তাহার অশ্বশক্তি নির্ণয় কর।

11. একটি কামানের গোলার ভর এক হন্দর ; ইহা 25 ফু./সে. বেগে বালির ভিতর 2 ফুট প্রবেশ করিয়া থামিয়া যায়। বালির বাধা নির্ণয় কর।

12. 120 পাউণ্ড ভারের একজন লোক অর্ধ মাইল উঁচু পাহাড়ের উপরে উঠিলে অভিকর্ষের বিরুদ্ধে সে কত কার্য করে?

13. একটি মসৃণ নততলের নতি 10-এ 1, 10 পাউণ্ড ভরের বস্তুকে তল বরাবর 5 ফুট ঠেলিয়া তুলিলে কত কার্য করা হইবে?

14. একজন লোকের ভার 120 পাউণ্ড। সে যদি ঘণ্টায় 3 মাইল করিয়া একটি পাহাড়ের গা বাহিয়া উঠে এবং পাহাড়ের নতি 6-এ 1 হয়, তাহা হইলে লোকটি কত অশ্বশক্তিতে কার্য করে?

15. 7 অশ্বশক্তির একটি স্টীম-চালিত ক্রেন 3 মিনিটে একটি বোঝা 45 ফুট উঠায়। বোঝার ভার সর্বাধিক কত হইতে পারে?

16. 100 টন ভরের একখানি রেলগাড়ি 100-এ 1 নতিবিশিষ্ট নততলে ঘণ্টায় 45 মাইল সমবেগে উপর দিকে উঠিতেছে। যদি গাড়ীর ভারের $\frac{1}{80}$ বাধা গতির বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে তাহা হইলে এঞ্জিনের অশ্বশক্তি নির্ণয় কর।

17. 3000 পাউণ্ড ভারের একটি মোটর গাড়ি উহার ভারের $\frac{1}{30}$ বাধা অতিক্রম করিয়া ঘণ্টায় 30 মাইল সমবেগে চলিলে উহার জন্য কত অশ্বশক্তির প্রয়োজন হয়?

18. 100-এ 1 নতিবিশিষ্ট নততলে 300 টন ভরের একটি গাড়ি ঘণ্টায় 10 মাইল সমবেগে উঠিতেছে। যদি ইহার উপর প্রতি টনে 14 পাউণ্ড বাধা ক্রিয়া করে তাহা হইলে এঞ্জিনের অশ্বশক্তি নির্ণয় কর।

19. 60 অশ্বশক্তির একটি এঞ্জিন অনুভূমিক তলে একটি বোঝা টানিতেছে। এঞ্জিন এবং বোঝার ভার 40 টন হইলে এবং ঘর্ষণজনিত বাধা প্রতি টনে 15 পাউণ্ড হইলে এঞ্জিন সর্বাধিক কত বেগ রক্ষা করিতে পারে?

20. একটি দ্বিচক্রযানের আরোহী সর্বদা $\frac{1}{10}$ অশ্বশক্তিতে কার্য করে। অনুভূমিক তলে সে ঘণ্টায় 12 মাইল বেগে যায়, দেখাও যে পথের বাধা 3·125 পাউণ্ড ভার।

যদি আরোহী সহ দ্বিচক্রযানের ভার 12 স্টোন হয়, প্রমাণ কর যে 50-এ 1 নতিবিশিষ্ট নততলে উঠিবার সময় তাহার গতিবেগ ঘণ্টায় প্রায় 5·8 মাইল।

21. পাঁচখানি ইট প্রথমে ভূমিতে ছিল ; ইহাদিগকে একটির উপরে একটি রাখিয়া সাজাইতে কত কার্য করা হয়? দেওয়া আছে যে প্রত্যেক ইটের ভার 10 পাউণ্ড এবং বেধ 3 ইঞ্চি।

22. একটি 1000 ফুট গভীর জলপূর্ণ গর্তের ব্যাস 10 ফুট। যদি একটি এঞ্জিন 10 ঘণ্টায় গর্তটির জল বাহির করিয়া ফেলে তাহা হইলে ইহার অশ্বশক্তি নির্ণয় কর।

23. জলপূর্ণ একটি কূপের গভীরতা 90 ফুট এবং প্রস্থচ্ছেদ 120 বর্গফুট। একটি এঞ্জিন 15 মিনিটে সমস্ত জল নিষ্কাশিত করিয়া কূপের মুখ হইতে 14 ফুট উপরে সমতলে উত্তোলন করে। এঞ্জিনের অশ্বশক্তি নির্ণয় কর।

24. একটি জলপূর্ণ স্তম্ভকাকৃতি কূপের গভীরতা 15 ফুট এবং ব্যাসার্ধ 20 ফুট ; একটি এঞ্জিন 5 মিনিটে সমস্ত জল নিষ্কাশিত করিয়া কূপের মুখ হইতে 22·5 ফুট উপরে তোলে। এঞ্জিনের অশ্বশক্তি নির্ণয় কর। জলের ঘনাঙ্ক এক ঘন ফুটে 62·5 পাউণ্ড।

25. 100 ফুট গভীর একটি কূপ জলে পূর্ণ ; ইহার অনুভূমিক ছেদ 20 ফুট দৈর্ঘ্যের এবং 15 ফুট প্রস্থের একটি আয়তক্ষেত্র। একটি ইঞ্জিনের সাহায্যে সমস্ত জল নিষ্কাশিত করিতে 20 মিনিট সময় লাগে। এঞ্জিনের অশ্বশক্তি নির্ণয় কর।

26. 200 টন ভরের একখানি রেলগাড়ি 560-এ 3 নতিবিশিষ্ট নততলে ঘণ্টায় 40 মাইল বেগে উঠিতেছে। এঞ্জিন যদি 600 অশ্বশক্তির বলপ্রয়োগ করে তবে ঘর্ষণ প্রভৃতির বাধা প্রতি টনে নির্ণয় কর।

27. 200 টন ভরের একখানি রেলগাড়ী 50-এ 1 নতিবিশিষ্ট নততলে ঘণ্টায় 30 মাইল সমবেগে উঠিতেছে। যদি ঘর্ষণ এবং বাতাসের বাধা প্রতি টনে 11·2 পাউণ্ড-ভারের সমান হয় তবে এঞ্জিনের অশ্বশক্তি নির্ণয় কর।

28. 500 পাউণ্ড ভরের একটি গোলা সেকেণ্ডে 1600 ফুট বেগে একটি স্থির লক্ষ্যে পতিত হয়। 6000 টন ভারের সমান বাধা অতিক্রম করিয়া ইহা লক্ষ্যের ভিতর কতদূর প্রবেশ করিবে?

29. 4 আউন্স ভরের একটি গুলি সেকেণ্ডে 1200 ফুট বেগে একটি লক্ষ্যে গিয়া বিদ্ধ হয়। লক্ষ্যের ভর 20 পাউণ্ড এবং ইহা অবাধভাবে চলিতে সক্ষম ; গতীয় শক্তির হানি ফুট পাউণ্ডে নির্ণয় কর।

30. 200 টন ভরের একটি রেলগাড়ী স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া 1 মিনিট 50 সেকেণ্ড সময়ে ঘণ্টায় 30 মাইল বেগ অর্জন করে। যদি প্রতি টনে 14 পা. ভার বাধা ক্রিয়া করে এবং বেগ সমত্বরণে বর্ধিত হয় তাহা হইলে এঞ্জিন সর্বাধিক কত অশ্বশক্তিতে ক্রিয়া করে?

31. দুইটি সমান বল সমান সময়ের নিমিত্ত অসমান ভর M এবং m-এর উপর ক্রিয়া করে। (i) উৎপাদিত ভরবেগের অনুপাত নির্ণয় কর, (ii) গতীয় শক্তির অনুপাত নির্ণয় কর।

32. m ভরের বন্দুকের গুলি u বেগে অবাধভাবে সরণক্ষম M ভরের একটি বস্তুর মধ্যে ঢুকিয়া পড়ে। দেখাও যে গতীয় শক্তির হানি $=\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}u^2$.

দেখাও যে ঘাতের পরে এবং পূর্বে গতীয় শক্তির অনুপাত $m : m+M$ এবং ঘাত হেতু গতীয় শক্তির $\frac{M}{m+M}$ অংশ হানি হয়।

33. M ভরের হাতুড়ি সাহায্যে m ভরের একটি পেরেক কাঠের ভিতর ঢুকান হইতেছে। হাতুড়ি যদি u বেগে পেরেককে আঘাত করে এবং প্রত্যেক আঘাতে পেরেক s দূরত্ব প্রবেশ করে তাহা হইলে দেখাও যে পেরেক প্রবেশ করিবার সময়ে $\frac{1}{2}\frac{M^2u^2}{(M+m)s}$ বাধা অতিক্রম করে।

সমাধান :—

আঘাতের পরমুহূর্তে বেগ v হইলে ভরবেগের নিত্যতা হইতে

$$(M+m)v=Mu+m\times 0 \quad \therefore \quad v=\frac{Mu}{M+m}$$

এখন পেরেক প্রবেশ করিবার সময় যদি P বাধা অতিক্রম করে,

যেহেতু কৃত কার্য=গতীয় শক্তির হানি

$$\therefore \quad P\,.\,s=\tfrac{1}{2}(M+m)v^2=\tfrac{1}{2}\frac{M^2u^2}{M+m}.$$

$$P=\tfrac{1}{2}\frac{M^2u^2}{(M+m)s}.$$

34. এক কিলোগ্রাম ভরের হাতুড়ি সাহায্যে 24 গ্রাম ভরের পেরেক কাঠের ভিতর ঢুকান হইতেছে। যদি পেরেক ঢুকিবার কালে হাতুড়ির বেগ সেকেণ্ডে 256 সেন্টিমিটার হয় এবং প্রত্যেক আঘাতে পেরেক 2 সেমি. প্রবেশ করে তাহা হইলে কি পরিমাণ বাধা অতিক্রম করিয়া পেরেক প্রবেশ করে ?

35. m ভরের একটি গুলি M ভরের একটি স্থির পাতের ভিতর s পরিমাণ দূরত্ব ভেদ করে। যদি M অবাধভাবে সরণক্ষম থাকে তাহা হইলে দেখাও যে ইহা $\frac{M}{M+m}.\,s$ পরিমাণ দূরত্ব ভেদ করিবে।

মনে কর, লক্ষ্যে প্রবেশের সময়ে বেগ u এবং গুলির উপর R বাধা ক্রিয়া করে।

গতীয় শক্তির হানি=বাধার বিরুদ্ধে কৃত কার্য

$$\tfrac{1}{2}mu^2=Rs. \quad \therefore \quad R=\tfrac{1}{2}\frac{mu^2}{s}.$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে মনে কর, গুলি ও লক্ষ্য সম্মিলিতভাবে v বেগে চলে এবং গুলি x দূরত্ব প্রবেশ করা পর্যন্ত বাধা ক্রিয়া করে।

ভরবেগের নিত্যতা হেতু

$$(M+m)v=mu \quad \therefore \quad v=\frac{mu}{M+m}.$$

গতীয় শক্তির হানি=বাধার বিরুদ্ধে কৃত কার্য

$$\tfrac{1}{2}mu^2-\tfrac{1}{2}(M+m)v^2=Rx$$

অথবা, $\tfrac{1}{2}mu^2-\tfrac{1}{2}(M+m)\dfrac{m^2u^2}{(M+m)^2}=Rx.$

$$\tfrac{1}{2}mu^2\left(1-\frac{m}{M+m}\right)=\tfrac{1}{2}mu^2\,\frac{x}{s}.$$

$$\therefore \quad x=\frac{Ms}{M+m}.$$

বিবিধ প্রশ্ন

1. স্রোত না থাকিলে একজন লোক 100 গজ চওড়া নদী সাঁতার কাটিয়া 4 মিনিটে সোজাসুজি উত্তীর্ণ হইতে পারে ; স্রোত থাকিলে তাহার 5 মিনিট সময় লাগে। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। [Benaras, 1945]

2. নদীতে স্রোত না থাকিলে একজন লোক b পরিমাণ প্রশস্ত নদী t সময়ে সোজাসুজি উত্তীর্ণ হয়, স্রোত থাকিলে তাহার t' $(>t)$ সময় লাগে। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। [C. U. 1954]

3. এক সময়ে একটি ষ্টীমার A অপর একটি ষ্টীমার B হইতে 10 মাইল দূরে আছে। A ঘণ্টায় 12 মাইল বেগে পূর্বদিকে চলিতেছে এবং B ঘণ্টায় 12 মাইল বেগে উত্তর দিকে যাইতেছে। তাহারা কি পরিমাণ নিকটবর্তী হইতে পারে ? [Patna, 1942]

4. স্রোতহীন নদীতে ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে সাঁতার কাটিতে সক্ষম একজন লোক ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে প্রবহমান 176 গজ চওড়া নদী পার হইতে ইচ্ছা করে। অপরপারে ন্যূনতম সময়ে পৌছিতে হইলে তাহাকে কোন্ দিকে সাঁতার কাটিতে হইবে নির্ণয় কর। নদী পার হইতে তাহার কত সময় লাগিবে এবং স্রোতের দিকে সে কতদূর চলিয়া যাইবে ?

5. u এবং v দুইটি বেগের লব্ধি u বেগের লম্বাভিমুখে। $u<v$ হইলে লব্ধি বেগের মান নির্ণয় কর।

6. একজন সাঁতারু t_1 সময়ে একটি নদী সোজা উত্তীর্ণ হয় এবং t_2 সময়ে সমপরিমাণ দূরত্ব স্রোতাভিমুখে যায়। যদি স্রোতহীন নদীতে লোকটির বেগ u হয় এবং স্রোতের বেগ যদি v হয়, দেখাও যে $t_1 : t_2 = \sqrt{u+v} : \sqrt{u-v}$.

7. একজন লোক s গজ প্রসস্ত নদী স্রোত না থাকিলে সোজা t মিনিটে উত্তীর্ণ হইতে পারে এবং স্রোত থাকিলে t' মিনিটে উত্তীর্ণ হয়। দেখাও যে স্রোতের বেগ প্রতি মিনিটে

$$s\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t'^2}}.$$

8. একটি নদীতে স্রোতের বেগ u এবং একজন লোক v বেগে তাহার নৌকা বাহিতে পারে $(v>u)$। সে যদি যাত্রাস্থলের সোজা বিপরীত বিন্দুতে গিয়া উত্তীর্ণ হইতে চায় কোন্ দিকে তাহাকে নৌকা বাহিতে হইবে ? ন্যূনতম সময়ে নদী উত্তীর্ণ হইবার জন্য সে কোন্ দিকে নৌকা বাহিবে ? নদীর প্রস্থ b হইলে উভয়ক্ষেত্রে সময়ের পার্থক্য নিরূপণ কর।

[**সঙ্কেত :** মনে কর, লোকটি স্রোতের দিকের সঙ্গে α কোণ করিয়া নৌকা বাহে, তাহা হইলে

$$\frac{\sin(\alpha-90^\circ)}{\sin 90^\circ}=\frac{u}{v} \quad or, \quad \cos\alpha=-\frac{u}{v} \quad \therefore \quad \alpha=\cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right)$$

যেহেতু, সময় $=\dfrac{b}{v\sin\alpha}$ ইহা সর্বাপেক্ষা কম হইলে $\sin\alpha$ সর্বাপেক্ষা বৃহৎ অর্থাৎ 1 এবং $\alpha=90^\circ$

সময়ের পার্থক্য $=\dfrac{b}{v\sin\alpha}-\dfrac{b}{v}=\dfrac{b}{v}\left(\dfrac{v}{\sqrt{v^2-u^2}}-1\right)$]

9. একখানি এরোপ্লেনের গতির দিক বায়ু প্রবাহের দিকের সঙ্গে θ কোণ করে। যদি বায়ুর সাপেক্ষে এরোপ্লেনের বেগ v এবং বায়ুর বেগ $V(<v)$ হয়, দেখাও যে এরোপ্লেনের লব্ধি বেগ $V\cos\theta+\sqrt{v^2-V^2\sin^2\theta}$; যেদিকে এরোপ্লেন চালাইতে হইবে তাহার জন্য একটি সূত্র নির্ণয় কর।

10. দুইজন সাঁতারু v_1 এবং v_2 বেগে সাঁতার কাটিয়া u বেগে প্রবহমান একটি নদী উত্তীর্ণ হয়। যেদিকে গেলে ন্যূনতম দূরত্ব অতিক্রম করিতে হয় প্রথম ব্যক্তি সেদিকে এবং যেদিকে ন্যূনতম সময় লাগে দ্বিতীয় ব্যক্তি সেদিকে সাঁতার কাটে যদি একই সময়ে যাত্রা করিয়া উভয়ে একই সময়ে অপর পারে পৌঁছে দেখাও যে $v_1^2-v_2^2=u^2$.

11. একজন মোটর গাড়ীর আরোহী যখন সোজা দক্ষিণদিকে ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে গাড়ী চালাইয়া যায় তাহার মনে হয় বায়ু পশ্চিম দিক হইতে প্রবাহিত হইতেছে। যখন গাড়ীর বেগ কমাইয়া ঘণ্টায় 15 মাইল করা হয় তখন বায়ু দক্ষিণ পশ্চিম দিক হইতে প্রবাহিত হয় বলিয়া মনে হয়। বায়ুর প্রকৃত বেগের মান ও দিক্ নিরূপণ কর।

12 দুইটি কণা একই মুহূর্তে A বিন্দু হইতে যাত্রা করে এবং AB সরলরেখা ধরিয়া একই অভিমুখে চলে। প্রথম কণা সেকেণ্ডে 40 ফুট সমবেগে চলে ; দ্বিতীয় কণা সেকেণ্ডে 16 ফুট প্রারম্ভিক বেগ লইয়া যাত্রা করে এবং 6 ফুট/সেকেণ্ড^2 সমত্বরণে চলে। পুনরায় একত্র হইবার পূর্বে কত সময় অতিবাহিত হয়? [C U. 1955]

13. একটি কণা সমত্বরণে চলিয়া পঞ্চম সেকেণ্ডে 25 ফুট এবং সপ্তম সেকেণ্ডে 33 ফুট পথ অতিক্রম করে। ইহার প্রারম্ভিক বেগ এবং ত্বরণ নির্ণয় কর। [C. U. 1951]

14. একটি বিন্দু সমত্বরণে চলে। প্রথম সেকেণ্ডের পরবর্তী অর্ধ সেকেণ্ডে ইহা 25 ফুট এবং সপ্তম সেকেণ্ডে 198 ফুট পথ অতিক্রম করে। বিন্দুটির ত্বরণ এবং প্রারম্ভিক বেগ নির্ণয় কর। [Benaras, 1951]

15. 8 ফু/সে^{2}. সমত্বরণ লইয়া একটি বস্তু স্থিরাবস্থা হইতে যাত্রা করে ; পথের দ্বিতীয় ফুট অতিক্রম করিতে ইহার কত সময় লাগে? [U. P. Board, 1956]

16. একটি বস্তুকে উল্লম্ব উচ্চাভিমুখে প্রক্ষেপ করিলে উহা 289 ফুট চরম উচ্চতা লাভ করে। প্রক্ষেপের কত সময় পরে ইহা 264 ফুট উচ্চতায় যাইবে? [U. P. Board, 1955]

17. অভিকর্ষ হেতু স্থিরাবস্থা হইতে পড়িবার কালে একটি বস্তু সেকেণ্ডে 120 ফুট বেগে একটা বিন্দু অতিক্রম করে। দুই সেকেণ্ড পূর্বে ইহা কোথায় ছিল, দুই সেকেণ্ড পরেই বা কোথায় থাকিবে? [U. P. Board, 1952]

18. একটি বেলুন উল্লম্বভাবে সমগতিতে উঠিতেছে ; 4·5 সেকেণ্ড সময় পরে ইহা হইতে একটি প্রস্তরখণ্ড ছাড়িয়া দেওয়া হয় এবং ইহা 7 সেকেণ্ডে ভূতলে পৌঁছে। বেলুনের বেগ এবং প্রস্তরখণ্ড ছাড়িবার সময়ে বেলুনের উচ্চতা নির্ণয় কর। [U. P. Board, 1951]

19. চন্দ্র পৃষ্ঠে পতনশীল বস্তুর ত্বরণ পৃথিবী-পৃষ্ঠে পতনশীল বস্তুর ত্বরণের ষষ্ঠাংশ হইলে, চন্দ্র-পৃষ্ঠ হইতে প্রতি সেকেণ্ডে 40 ফুট বেগে উল্লম্বভাবে উৎক্ষিপ্ত বস্তু কত উচ্চতা লাভ করিবে? [B. H. U. 1957]

20. প্রতি সেকেণ্ডে 20 ফুট বেগে একটি বেলুন নীচের দিকে নামিতেছে। ইহা হইতে একটি বস্তু ছাড়িয়া দিলে উহা 10 সেকেণ্ডে ভূতলে আসিয়া পৌঁছে। কত বেগে উহা ভূতলে পৌঁছে এবং যখন বস্তুটি ছাড়া হয় তখন বেলুন কত উঁচুতে ছিল?

21. 400 ফুট উঁচু একটি পাহাড়ের পাদদেশ হইতে একটি ঢিল উল্লম্বভাবে উর্ধ্বদিকে এমন বেগে উৎক্ষিপ্ত হইল যাহা ইহাকে ঠিক শীর্ষদেশে নিতে পারে। এক সেকেণ্ড পরে অপর একটি ঢিল পাহাড়ের শীর্ষদেশ হইতে ছাড়িয়া দেওয়া হয়। কখন এবং কোথায় তাহারা পরস্পরের সম্মুখীন হইবে?

22. অভিকর্ষ হেতু অবাধভাবে পতনশীল একটি কণা কোনও সেকেণ্ডে 80 ফুট পথ অতিক্রম করে। পরবর্তী সেকেণ্ডে ইহা কত পথ যাইবে?

23. তিনটি কণা একই সময়ে h_1, h_2, h_3 উচ্চতা হইতে যথাক্রমে u_1, u_2, u_3 বেগে উল্লম্বভাবে উৎক্ষিপ্ত হয় এবং তাহারা একই সঙ্গে ভূতলে পৌঁছে। দেখাও যে

$$u_1(h_2-h_3)+u_2(h_3-h_1)+u_3(h_1-h_2)=0.$$

24. একটি রেলগাড়ীর বেগ সমত্বরণ α লইয়া 0 হইতে Vতে বর্ধিত হয়, তারপর ইহা কিছু সময় সমবেগে চলে, অবশেষে β সম-মন্দনে বেগ শূন্যে পরিণত হয়। যদি সমগ্র পথ l হয় প্রমাণ কর যে সমগ্র সময় $\frac{l}{V}+\frac{V}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$.

যখন $\alpha=\beta$ তখন সর্বাপেক্ষা কম সময় কত?

25. একটি কণা f সমত্বরণে চলিয়া t সময়ে s দূরত্ব এবং পরবর্তী t' সময়ে s' দূরত্ব অতিক্রম করে। প্রমাণ কর যে $f=2\left(\frac{s'}{t'}-\frac{s}{t}\right)\Big/(t+t')$

26. একজন পাহারাওয়ালা x ফুট দূরে এক চোরকে দেখিয়া তাহাকে ধরিবার জন্য u বেগে যাত্রা করিয়া α ত্বরণে ছুটে; চোর স্থিরাবস্থা হইতে β ত্বরণে দৌড়ায়। প্রমাণ কর যে যদি $\alpha \geqslant \beta$ হয় অথবা যদি $\alpha<\beta<\alpha+\frac{u^2}{2x}$ হয়, তাহা হইলে পাহারাওয়ালা চোরকে ধরিতে পারিবে।

27. একটি সমবল এক সরলরেখায় ধাবমান একটি বস্তুর বেগ এক মিনিট সময়ে সেকেণ্ডে 250 মিটার হইতে সেকেণ্ড 300 মিটারে পরিবর্তন করে। বস্তুটির ভর নির্ণয় কর।

28. ঘণ্টায় 50 মাইল বেগে ধাবমান একটি মোটর গাড়ীকে ব্রেক কষিয়া 3 সেকেণ্ড সময়ে থামান হয়। প্রথমে যে স্থানে ব্রেক কষা হয় সেস্থান হইতে কত দূরে ইহা থামিবে? দেখাও যে ব্রেক যে মন্দন বল প্রয়োগ করে তাহা গাড়ীর ভারের প্রায় ·764 পরিমাণ অংশ।

29. 80 পাউণ্ড ভারের একটি বস্তু 30 ফুট উঁচু হইতে বালির উপর পতিত হয়। বস্তুটি বালির ভিতর 4 ফুট প্রবেশ করিবার পর থামিয়া যায়। যদি বালির মন্দন বল সম হয় তাহা হইলে বলের পরিমাণ নিরূপণ কর।

30. 10 গ্রাম ভরের বস্তু সেকেণ্ডে 50 সেন্টিমিটার বেগে চলিতেছে। ইহার গতীয় শক্তি (1) আর্গ এককে (2) সেন্টিমিটার গ্রাম এককে কত?

31. এক টন ভরের একটি গাড়ী 112-তে 1 (অর্থাৎ $\sin^{-1}\frac{1}{112}$) নতিবিশিষ্ট নততলে 3ফুট/সে^{2}. সমত্বরণে উঠিতেছে। যখন গাড়ী ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে চলে বাধা 20 পাউণ্ড ভার হইলে এঞ্জিন কত অশ্বশক্তিতে ক্রিয়া করে নির্ণয় কর। [C. U. 1958]

32. একটি এঞ্জিন সর্বসমেত 60 টনের একটি রেলগাড়ীকে 100-তে 1 নতিবিশিষ্ট নততলে ঘণ্টায় সর্বাধিক 30 মাইল বেগে নিয়া যায়; 150 টনের রেলগাড়ীকে একই বেগে সমতলে নিয়া যাইতে পারে; যখন এই বেগে চলে তখন পথের বাধা প্রতি টনে কত পাউণ্ড এবং এঞ্জিনের অশ্বশক্তির হার নির্ণয় কর।

33. একটি যান 200 টনের বোঝা টানিয়া নেয়। (1) যদি ঘর্ষণ বল বোঝার 0·05 অংশ হয় তাহা হইলে সমগতিতে নিতে কি টান প্রয়োজন হয় নির্ণয় কর। (2) যদি ঘর্ষণ একই পরিমাণ হয় এবং দ্রুতি এক মিনিট সময়ে সেকেণ্ডে 30 ফুট হইতে সেকেণ্ডে 60 ফুটে পরিণত হয়, তখন টান কত? ($g = 32$ ফুট/সেকেণ্ড^2)

34. একটি 5 আউন্স ভারের বিলিআর্ড বলকে সেকেণ্ডে 16 ইঞ্চি বেগে চলিতে পারে এমনভাবে আঘাত করা হয়। যদি আঘাত $\frac{1}{180}$ সেকেণ্ড স্থায়ী হয় তবে ঐ সময়ে গড় বল নির্ণয় কর।

35. রাইফেলের নলের মুখে এক আউন্স গুলির সেকেণ্ডে 1000 ফুট বেগে আছে; যতক্ষণ গুলি বন্দুকের ভিতর থাকে ততক্ষণ ইহার ত্বরণ সম হইলে এবং বন্দুকের নল 2 ফুট লম্বা হইলে নল অতিক্রম করিতে গুলির কত সময় লাগে নির্ণয় কর। গুলির উপর গড় বল এবং ব্যারেলের উপর গড় ক্ষমতা নির্ণয় কর।

36. একটি বোমা সেকেণ্ডে 60 ফুট বেগে চলিবার কালে ফাটিয়া 36 পাউণ্ড এবং 6 পাউণ্ড দুই অংশে বিভক্ত হয়। যদি বৃহত্তর অংশ আগের দিকে 75 ফু./সে. বেগে চলে তাহা হইলে অপর অংশের গতির দিক্ ও বেগ নির্ণয় কর। ফাটিবার পূর্বে এবং পরে গতীয় শক্তি নির্ণয় কর।

[উত্তর প্রদেশ বোর্ড, 1958]

37. এক ঢিল এরূপভাবে প্রক্ষিপ্ত হইল যাহাতে প্রক্ষেপসীমা বৃহত্তম এবং 80 ফুট হয়। ইহা কত সময় শূন্যে ছিল এবং কত উঁচুতে উঠিয়াছিল? [এলাহাবাদ 1948]

38. একটি বস্তু এরূপভাবে প্রক্ষিপ্ত হইল যেন অনুভূমিক প্রক্ষেপসীমা চরম উচ্চতার তিনগুণ হয়। প্রক্ষেপ কোণ নির্ণয় কর এবং যদি এই প্রক্ষেপকোণে প্রক্ষেপসীমা 400 মিটার হয় তাহা হইলে প্রক্ষেপ বেগ এবং উত্থিতিকাল নির্ণয় কর।

স্থিতিবিদ্যা
(Statics)

একাদশ পরিচ্ছেদ

একবিন্দুতে প্রযুক্ত বলসমূহের লব্ধি এবং সাম্যাবস্থা
(Resultant of forces acting at a point & equilibrium)

11-1. বলবিদ্যার (Mechanics) যে অংশে বলসমূহের প্রয়োগে বস্তুর স্থিরাবস্থার আলোচনা করা হয় তাহাকে স্থিতিবিদ্যা (Statics) বলে।

11-2. সূচনাতেই বলের সংজ্ঞা দেওয়া হইয়াছে—যাহা বস্তুর স্থিরাবস্থার অথবা সমবেগে গতিশীল অবস্থার পরিবর্তন সাধন করে বা পরিবর্তন সাধন করিতে চেষ্টা করে তাহাকে **বল** (Force) বলে।

11-3 যখন দুই বা অধিক বলের প্রয়োগে কোন বস্তু স্থির অবস্থায় থাকে তখন বলসমূহ **সাম্যাবস্থায়** (equilibrium) আছে বলা হয়।

কোন বস্তু যদি বলসমূহের ক্রিয়ার জন্য সমবেগে চলে তখনও বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকে।

একটি রেলগাড়ি যখন সমবেগে যায় তখন ইঞ্জিন যে বল প্রয়োগ করে তাহা বিপরীতমুখী অন্যান্য বলের সহিত একত্রযোগে সাম্যাবস্থায় থাকে।

11-4. গতিবিদ্যায় আমরা বলের গতীয় রূপের (Dynamical aspect) সহিত পরিচিত হইয়াছি। সেখানে বলকে উৎপাদিত ভরবেগের দ্বারা পরিমাপ করা হইয়াছে। স্থিতিবিদ্যায় কোন বল যে পরিমাণ ভারকে ধরিয়া রাখিতে পারে তাহার দ্বারা ঐ বলের পরিমাপ করা হয়।

11-5. **সমান বল** (Equal Forces): দুইটি বল কোন বিন্দুতে বিপরীত দিকে প্রযুক্ত হইলে যদি বিন্দুটি স্থির থাকে তবে বল দুইটি সমান।

11-6. যখন তিন বা ততোধিক বল সাম্যাবস্থায় থাকে তখন ইহাদের যে-কোন একটির ফল অবশিষ্ট বলসমূহের ফলের সমান ও বিপরীত। এই বলের বিপরীতমুখী সমান একটি বল অবশিষ্ট বলসমূহের লব্ধি (Resultant)।

লব্ধি (Resultant): কোন বস্তুর উপর একাধিক বল প্রযুক্ত হইলে যদি এমন একটি বল পাওয়া যায় যাহার ফল ঐ একাধিক বলের সম্মিলিত ফলের সমান, তাহা হইলে এই বলটিকে ঐ একাধিক বলের লব্ধি বলা হয়, এবং ঐ বলসমূহ এই বলের **উপাংশ** (components)।

11-7. বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল তিনটি বিভিন্ন রূপে প্রকাশ পায় ; যথা— (1) আকর্ষণ বা বিকর্ষণ, (2) টান ও ঘাত এবং (3) প্রতিক্রিয়া ও ঘর্ষণজনিত বল।

আকর্ষণ বা **বিকর্ষণ** (Attraction or Repulsion)

একটি বস্তু যদি কোন চক্ষুগোচর মাধ্যমের সাহায্য ব্যতীত আর একটি বস্তুর উপর দূর হইতে বল প্রয়োগ করিয়া তাহাকে নিকটে আনিতে চাহে, তবে ঐ বলকে **আকর্ষণ** বল বলে।

একটি বস্তু যদি কোন চক্ষুগোচর মাধ্যমের সাহায্য ব্যতীত আর একটি বস্তুর উপর বল প্রয়োগ করিয়া উহাকে দূরে সরাইয়া দিতে চায়, তখন ঐ বলকে **বিকর্ষণ** বল বলে।

পৃথিবী প্রত্যেক বস্তুকে তাহার কেন্দ্রের দিকে আকর্ষণ করে। কোন বস্তুকে পৃথিবী যে বল দিয়া আকর্ষণ করে তাহা ঐ বস্তুর **ভার** (Weight)।

টান ও ঘাত (Tension and Thrust)

যখন দড়ি বাঁধিয়া কোন বস্তুকে টানা হয় তখন বস্তুর উপর দড়ির সাহায্যে যে বল প্রয়োগ করা হয় তাহা **টান** (Tension)। বস্তুতে ঠেলা দিয়া বল প্রয়োগ করিলে তাহাকে **ঘাত** (Thrust) বলে।

প্রতিক্রিয়া এবং ঘর্ষণজনিত বল (Reaction and Friction)

টেবিলের উপর কোন বস্তু রাখিলে বস্তুটি টেবিলের উপর চাপ দেয়, বস্তুর উপর তাহার বিপরীত যে বল ক্রিয়া করে তাহা **প্রতিক্রিয়া** (Reaction)।

ঘরের মেঝের উপর কোন বস্তু রাখিয়া অনুভূমিকভাবে বল প্রয়োগ করিলে বিপরীত দিকে একটি বল গতিকে বাধা দিতে চেষ্টা করে ইহা **ঘর্ষণজ বল** (Force of Friction)।

11-8. বলের পরিমাপ : আমরা দেখিয়াছি, বস্তুর ভার একটি বল। স্থিতিবিদ্যায় এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে এক পাউণ্ডের ভারকে বল পরিমাপ করিবার একক লওয়া হয়, ইহাকে 'এক পাউণ্ড-ভার' (one pound weight) বলা হয়। যে পরিমাণ বল উর্ধ্বাভিমুখে প্রযুক্ত হইলে এক পাউণ্ড ভরের বস্তুকে ধরিয়া রাখিতে পারে তাহাই বলের একক।

গতিবিদ্যায় আমরা দেখিয়াছি, এক পাউণ্ড ভরের ভার পৃথিবীর সর্বত্র সমান নহে। স্থিতিবিদ্যায় পৃথিবীর বিভিন্ন স্থানে বলের তুলনা করিবার প্রয়োজন নাই। সেইজন্য এক পাউণ্ড ভরের বস্তুর ভার নির্দিষ্ট বলিয়া ধরা

যায় এবং ইহাকে বলের একক ধরিতে দোষ নাই। অনেক সময় 'বল এক পাউণ্ডের ভার' না বলিয়া সংক্ষেপে 'এক পাউণ্ড বল' বলা হয়। '10 পাউণ্ড বল' বলিলে বুঝিবে '10 পাউণ্ড ভরের ভারের সমান বল।'

সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে এক গ্রাম ভরের বস্তুর ভারকে বলের একক গ্রহণ করা হয়। ইহাকে 'এক গ্রাম-ভার' বলা হয়।

11-9. সরলরেখার দ্বারা বল প্রদর্শন (Representation of Force)

কোন বলকে সম্যক্ জানিতে হইলে তিনটি জিনিস জানার প্রয়োজন—

(1) বলের **প্রয়োগবিন্দু** (Point of application) অর্থাৎ বস্তুর কোন্ বিন্দুতে বল প্রয়োগ করা হইয়াছে।

(2) বলের **দিক্** (Direction)।

(3) বলের **মান** (Magnitude)।

সরলরেখারও এই তিনটি গুণ আছে ; যথা - প্রারম্ভবিন্দু, দিক্ এবং মান। একটি সরলরেখা কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া নির্দিষ্ট দিকে নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের অঙ্কন করিতে হয়।

অতএব বলকে একটি সরলরেখা দ্বারা প্রদর্শন করা যায়।

মনে কর, একটি প্রদত্ত বস্তুর O বিন্দুতে উত্তরাভিমুখে 20 পাউণ্ড ভারের একটি বল ক্রিয়া করিতেছে। এক ইঞ্চি দৈর্ঘ্য যদি 5 পাউণ্ড-ভার নির্দেশ করে তাহা হইলে O বিন্দু দেখাইয়া এই বিন্দু হইতে উত্তর দিকে 4 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যের একটি সরলরেখা OA অঙ্কন করিলে উহা উক্ত বলকে সম্যক্রূপে প্রদর্শন করে। সচরাচর বলের দিক্ ও মান এই দুইটির প্রদর্শন প্রয়োজন হয়। তখন OA রেখার সমান ও সমান্তরাল যে-কোন রেখা উক্ত বলের দিক্ ও মান প্রদর্শন করে।

বল একটি ভেক্টর (Vector) রাশি।

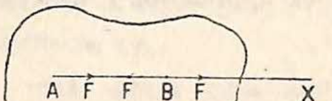
দুই বা ততোধিক ভেক্টর রাশির যোগ বা লব্ধি নির্ণয়ের প্রণালী বলসমূহের লব্ধি নির্ণয়ে প্রযোজ্য।

11-10. বস্তুকে কণার সমষ্টিরূপে গ্রহণ করা যায়। বস্তুর যে-কোন দুইটি কণার ব্যবধান যদি সকল অবস্থাতে এক থাকে তাহা হইলে বস্তুটি দৃঢ় বলা হয়। প্রকৃতিতে এরূপ বস্তু নাই। কিন্তু আমরা দৃঢ় বস্তুর উপর বল প্রযুক্ত হইয়াছে বলিয়া সর্বদা মনে করিব। আমরা স্বতঃসিদ্ধরূপে স্বীকার করিয়া লই যে, দৃঢ় বস্তুর কোন বিন্দুতে দুইটি বিপরীতমুখী সমান বল প্রয়োগ করিলে

অথবা ক্রিয়মাণ তুইটি বিপরীতমুখী সমান বল অপসারিত করিলে বস্তুর সাম্যাবস্থার উপর কোন ক্রিয়া হয় না।

11-11 যদি একটি বল কোন দৃঢ় বস্তুর একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত হয়, তাহা হইলে ঐ বল যে রেখায় ক্রিয়া করিতেছে সে রেখার উপর অন্য কোন বিন্দুতে বলটি ক্রিয়া করিতেছে বলিয়া গ্রহণ করা যাইতে পারে।

মনে কর, F বল একটি বস্তুর A বিন্দুতে AX রেখার দিকে প্রযুক্ত হইয়াছে। AX সরলরেখার উপর অন্য যে-কোন একটি বিন্দু B লও এবং B বিন্দুতে তুইটি সমান বিপরীতমুখী বল F এবং F, BA এবং BX-এর দিকে লও। ইহারা বস্তুর স্থিরাবস্থার কোন পরিবর্তন ঘটাইবে না। A বিন্দুতে AB-র দিকে যে বল ক্রিয়া করিতেছে এবং B বিন্দুতে BA রেখার দিকে যে বল ক্রিয়া করিতেছে ইহারা সমান ও বিপরীতমুখী। ইহাদের কোন ফল নাই, অতএব ইহারা অপসারিত হইয়াছে মনে করিতে পারি। এখন B বিন্দুতে BX-এর দিকে ক্রিয়মাণ F বল রহিল। অতএব A বিন্দুতে F বলের পরিবর্তে উহার ক্রিয়ারেখার উপর যে-কোন B বিন্দুতে F বল গ্রহণ করিতে পারি।



11-12. যখন আমরা একটি বস্তুকে টেবিলের উপর রাখিয়া অনুভূমিক দিকে টানি তখন বিপরীতমুখী একটা বল আসিয়া বাধা দেয়। বস্তু যত মসৃণ হয় এই বল তত কম। কিন্তু তুইটি বস্তু যত মসৃণই হউক না কেন এরূপ বল ক্রিয়া করে। যদি তাহারা সম্পূর্ণ মসৃণ হইত তবে এরূপ কোন বল থাকিত না। সম্পূর্ণ মসৃণ হইলে তুইটি বস্তুর মধ্যে ক্রিয়া-প্রতিক্রিয়া স্পর্শবিন্দুতে তাহাদের সাধারণ তলের লম্বাভিমুখে।

11-13. এই পুস্তকে আমরা এক সমতলে অবস্থিত বলসমূহের ক্রিয়া আলোচনা করিব। প্রথমে এক বিন্দুতে প্রযুক্ত বলসমূহের ক্রিয়া আলোচনা করা হইবে ; পরে বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলসমূহের আলোচনা করিব।

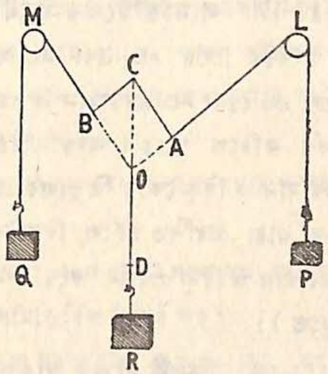
11-14. একটি বস্তুর কোন বিন্দুতে তুইটি বল বিভিন্ন দিকে ক্রিয়া করিলে তাহাদের লব্ধি নিম্নলিখিত সূত্র দ্বারা পাওয়া যায়।

বলের সামান্তরিক সূত্র (Parallelogram of Forces) :

যদি একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত তুইটি বলের মান ও দিক্ কোন সামান্তরিকের তুই সন্নিহিত বাহুর দ্বারা প্রদর্শিত হয় তাহা হইলে

এই দুই বাহুর ছেদবিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত কর্ণ লব্ধি বলের মান ও দিক্ প্রদর্শন করে।

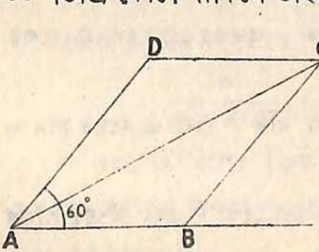
11-15 এই সূত্রের প্রমাণ জটিল। এখানে পরীক্ষামূলক প্রমাণ বর্ণনা করা হইতেছে। P, Q এবং R তিনটি বিভিন্ন ভারের বস্তু (যে-কোন দুই ভারের সমষ্টি তৃতীয় ভার অপেক্ষা বেশি) এক বিন্দুতে গ্রন্থি-দেওয়া তিনটি ভারহীন সূতার প্রান্তে বাঁধিয়া দেওয়া হয়। দেওয়াল সংলগ্ন দুইটি কপিকলের (L এবং M) উপর দিয়া লইয়া গিয়া চিত্রে প্রদর্শিত প্রকারে ইহাদের ঝুলাইয়া দেওয়া হয়। এখন



O বিন্দুতে সূতা তিনটির দিকে P, Q এবং R টান পড়ে ; এই তিনটি বল প্রযুক্ত হইয়া O বিন্দু স্থিরাবস্থায় আছে। সুতরাং P এবং Q-এর লব্ধি R-এর সমান ও বিপরীতমুখী। পিছনের দেওয়ালে অথবা ব্ল্যাকবোর্ডে OL, OM এবং OR-এর দিকে তিনটি রেখা OA, OB এবং OD এমনভাবে অঙ্কন করা হয় যেন তাহারা P, Q এবং Rএর মান প্রদর্শন করে। মনে কর, বস্তু তিনটির ভার 5, 7 ও 9 গ্রাম এবং OA, OB, OD যথাক্রমে 5, 7 এবং 9 সেন্টিমিটার। এখন OACB সামান্তরিক সম্পূর্ণ করিয়া OC যোগ করিলে দেখা যাইবে যে OC রেখা OD রেখার বিপরীতমুখী এবং OC-এর দৈর্ঘ্য 9 সেন্টিমিটার। প্রমাণিত হইল যে, OACB সামান্তরিকের দুইটি বাহু OA এবং OB যদি P এবং Q বল নির্দেশ করে তাহা হইলে OC কর্ণ তাহাদের লব্ধি নির্দেশ করে।

11-16. উদাহরণ

একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত 7 এবং 9 পাউণ্ড-ভারের দুইটি বল পরস্পরের সহিত 60° ডিগ্রি কোণে থাকিলে তাহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।



মনে কর, 0·1 ইঞ্চি দৈর্ঘ্য 1 পাউণ্ড-ভার নির্দেশ করে। প্রথম বলের দিকে 0·7 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যের AB রেখা অঙ্কিত কর। দ্বিতীয় বলের দিকে (AB-এর সঙ্গে 60° কোণে) AD রেখা 0·9 ইঞ্চি দৈর্ঘ্যের লও। ABCD সামান্তরিক সম্পূর্ণ করিয়া AC যুক্ত কর।

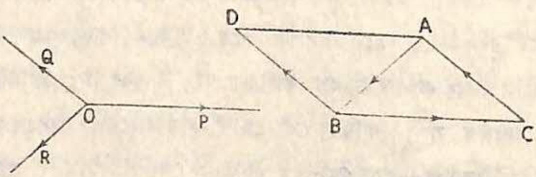
AC রেখা লব্ধিবেগের মান ও দিক্ প্রদর্শন করে। AC রেখা মাপিয়া দেখ ; ইহা প্রায় 1·4 ইঞ্চি হইল। তাহা হইলে লব্ধিবল 14 পাউণ্ড ভার (স্থূলতঃ)।

11-17 সামান্তরিকের অর্ধেক অঙ্কন করিলেই যথেষ্ট

উপরের চিত্রে AB এবং AD যদি দুইটি বল P এবং Q নির্দেশ করে তাহা হইলে, BC রেখা AD-এর সমান ও সমান্তরাল বলিয়া ইহা Q-এর মান ও দিক্ নির্দেশ করিতে পারে (অবস্থান নয়)। সুতরাং একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বলের মান ও দিক্ কোন ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত দুইটি বাহু AB এবং BC-র দ্বারা প্রদর্শিত হইলে, বিপরীতক্রমে গৃহীত তৃতীয় বাহু AC তাহাদের লব্ধির মান ও দিক্ প্রদর্শন করে (লব্ধির প্রয়োগবিন্দু বল দুইটির প্রয়োগ-বিন্দুতে)।

11-18. তিনটি বলের সাম্যাবস্থা

বলের ত্রিভুজ সূত্র : কোন বিন্দুতে ক্রিয়মাণ তিনটি বলের মান ও দিক্ যদি একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহুর দ্বারা প্রদর্শিত হইতে পারে, তাহা হইলে বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকিবে।



মনে কর, তিনটি বল P, Q এবং R একটি বিন্দু O-তে ক্রিয়া করিতেছে এবং তাহাদের মান ও দিক্ ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহু BC, CA এবং AB-র দ্বারা প্রদর্শিত হয়।

প্রমাণ করিতে হইবে P, Q এবং R সাম্যাবস্থায় আছে।

BCAD সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর।

BD রেখা CA রেখার সমান ও সমান্তরাল ; অতএব BD রেখা Q বলের মান ও দিক্ নির্দেশ করে।

এখন BCAD সামান্তরিকের BC এবং BD বাহু P এবং Q বলের মান ও দিক্ নির্দেশ করে ; O তাহাদের প্রয়োগ বিন্দু।

অতএব বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে BA রেখা P এবং Q-এর লব্ধির মান ও দিক্ নির্দেশ করে ; ইহার প্রয়োগবিন্দু O.

কিন্তু O বিন্দুতে প্রযুক্ত R বলের মান ও দিক্ AB রেখার দ্বারা প্রদর্শিত হয়। অতএব P এবং Q-এর লব্ধি R বলের সমান ও বিপরীতমুখী। সুতরাং তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে।

11-19. বলের ত্রিভুজ-সূত্রের বিপরীত প্রতিজ্ঞা : একটি বিন্দুতে তিনটি বল প্রযুক্ত হইয়া যদি বিন্দুটি স্থিরাবস্থায় থাকে, তাহা হইলে বল তিনটির দিকের সমান্তরাল বাহবিশিষ্ট যে-কোন ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহু ঐ বল তিনটির মান ও দিক্ প্রদর্শন করে।

মনে কর, O বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বল P, Q এবং R সাম্যাবস্থায় আছে। (চিত্র, পূর্ব অনুচ্ছেদ দেখ)।

P এবং Q বলের মান ও দিক্ নির্দেশ করে এমন দুইটি সরলরেখা BC এবং CA অঙ্কিত কর ; AB যুক্ত কর এবং BCAD সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর।

যেহেতু BD রেখা CA সরলরেখার সমান ও সমান্তরাল, অতএব BD রেখাও Q বল নির্দেশ করে। এখন বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে BA সরলরেখা P এবং Q বলের লব্ধির মান ও দিক্ নির্দেশ করে। কিন্তু যেহেতু P, Q এবং R সাম্যাবস্থায় আছে, অতএব R বল P এবং Q বলের লব্ধির সমান ও বিপরীতমুখী। সুতরাং AB রেখা R-এর দিক্ ও মান প্রদর্শন করে।

এখন আমরা ABC একটি ত্রিভুজ পাইলাম ; ইহার BC, CA, AB বাহু যথাক্রমে P, Q এবং R বলের দিক্ ও মান নির্দেশ করে।

এই ত্রিভুজের সমান্তরাল বাহু-বিশিষ্ট অন্য যে-কোন ত্রিভুজ অঙ্কন করিলে দুই ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতিক, সুতরাং দ্বিতীয় ত্রিভুজের বাহুগুলি (ভিন্ন স্কেলে) বল তিনটির দিক্ ও মান নির্দেশ করে।

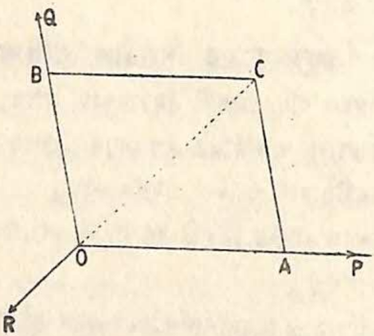
***11-20. ল্যামির সূত্র (Lami's Theorem) : যদি এক বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকে, তাহা হইলে প্রত্যেক বল অন্য দুই বলের অন্তর্ভূত কোণের সাইনের অনুপাতে।**

মনে কর, O বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বল P, Q এবং R সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে

$$\frac{P}{\sin QOR} = \frac{Q}{\sin ROP} = \frac{R}{\sin POQ}$$

P এবং Q বলের ক্রিয়া রেখা হইতে OA এবং OB দৈর্ঘ্য এমনভাবে ছেদ কর যেন তাহারা P এবং Q বল প্রদর্শন করে। OACB সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর এবং OC যুক্ত কর।

এখন বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে OC রেখা P এবং Q বলের লব্ধি নির্দেশ করে। কিন্তু যেহেতু, P, Q এবং R সাম্যাবস্থায় আছে অতএব R বল



P এবং Q বলের লব্ধির সমান ও বিপরীতমুখী। সুতরাং CO রেখা R বলকে নির্দেশ করে। আবার AC রেখা OB-এর সমান্তরাল ও সমান বলিয়া AC রেখা Q বলের মান এবং দিক্ নির্দেশ করে।

অতএব OAC ত্রিভুজের তিনটি বাহু OA, AC এবং CO যথাক্রমে P, Q এবং R-এর মান ও দিক্ নির্দেশ করে।

এখন, OAC ত্রিভুজে

$$\frac{OA}{\sin OCA}=\frac{AC}{\sin COA}=\frac{CO}{\sin OAC}$$

কিন্তু $\sin OCA=\sin COB=\sin(180°-QOR)=\sin QOR$

$\sin COA=\sin(180°-ROP)=\sin ROP$

$\sin OAC=\sin(180°-POQ)=\sin POQ.$

যেহেতু OA, AC, CO যথাক্রমে P, Q এবং R বলের দিক্ ও মান প্রদর্শন করে

সুতরাং $\dfrac{P}{\sin QOR}=\dfrac{Q}{\sin ROP}=\dfrac{R}{\sin POQ}$

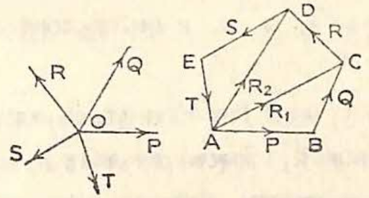
11-21. তিনের অধিক বলের সাম্যাবস্থা

বলের বহুভুজ সূত্র : কোন বিন্দুতে প্রযুক্ত বহুসংখ্যক বলের মান ও দিক্ যদি একটি বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুসমূহের দ্বারা প্রদর্শিত হয় তাহা হইলে ঐ বলসমূহ সাম্যাবস্থায় আছে।

মনে কর, P, Q, R, S এবং T বল O বিন্দুতে প্রযুক্ত হইয়াছে এবং তাহাদের মান ও দিক্ ABCDE বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু AB, BC, CD, DE এবং EA দ্বারা প্রদর্শিত হয়।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, বলগুলি সাম্যাবস্থায় আছে।

AC এবং AD যুক্ত কর।



P এবং Q বলের মান ও দিক্ AB এবং BC রেখার দ্বারা নির্দিষ্ট হয়; অতএব AC রেখা ঐ দুই বলের লব্ধির (R_1) মান ও দিক্ নির্দেশ করে। আবার R_1 এবং R বলের লব্ধির (R_2) মান ও দিক্ AD রেখার দ্বারা নির্দিষ্ট হয় অর্থাৎ AD রেখা P, Q এবং R বলের লব্ধির মান ও দিক্ নির্দেশ করে। এইরূপভাবে P, Q, R এবং S বলের লব্ধির মান ও দিক্ AE রেখা দ্বারা নির্দিষ্ট হয় কিন্তু অবশিষ্ট বল T-এর মান ও দিক্ EA রেখার দ্বারা নির্দিষ্ট হইয়াছে। সুতরাং ইহা P, Q, R এবং S-এর লব্ধির সমান ও বিপরীতমুখী। অতএব বলসমূহ সাম্যাবস্থায় আছে।

অনুসিদ্ধান্ত : **কোন বিন্দুতে প্রযুক্ত বলসমূহের লব্ধি নির্ণয় (অঙ্কন সাহায্যে)।**

কোন বিন্দুতে প্রযুক্ত বলসমূহের মান ও দিক্ যদি ক্রমানুসারে গৃহীত AB, BC, CD,....রেখাসমূহের দ্বারা প্রদর্শিত হয়, তাহা হইলে প্রথম রেখার প্রারম্ভ বিন্দু এবং শেষ রেখার অন্তিম-বিন্দু যুক্ত করিয়া যে রেখা পাওয়া যায়, তাহা লব্ধিবলের মান ও দিক্ নির্ণয় করে।

11-22. **বলের বহুভুজ-সূত্রের বিপরীত প্রতিজ্ঞা :** ইহা ত্রিভুজ-সূত্রের বিপরীত প্রতিজ্ঞার ন্যায় ব্যাপক নহে :

কোন বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনের অধিক-সংখ্যক বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে তাহা হইলে এই বলসমূহের মান ও দিক্ নির্দিষ্ট হইতে পারে এইরূপ বাহু-বিশিষ্ট একটি বহুভুজ অঙ্কন করা যায়।

কিন্তু বলসমূহের সমান্তরাল বাহুবিশিষ্ট যে-কোন বহুভুজের বাহুসমূহ এই বলসমূহের নির্দেশক হইতে পারে না।

কোন A বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া পর-পর AB, BC, CD, DE রেখা O বিন্দুতে প্রযুক্ত P, Q, R, S বলসমূহের মান ও দিক্ নির্দেশ করিবার জন্য

অঙ্কন কর (এই চিত্র নিজেরা আঁক) ; EA যুক্ত কর, তাহা হইলে EA রেখা অবশিষ্ট বল T-এর নির্দেশক হইবে ; (কারণ, T বল অন্য বলগুলির লব্ধি AE-র সমান ও বিপরীত) তাহা হইলে ABCDE বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহু-সমূহ O বিন্দুতে প্রযুক্ত P, Q, R, S এবং T বলের মান ও দিক্ নির্দেশ করিল।

AB রেখার উপর A_1 একটি বিন্দু লইয়া AE এর সমান্তরাল রেখা অঙ্কিত কর। ইহা যেন DE-কে E_1 বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন A_1BCDE_1 বহুভুজের বাহুসমূহ ABCDE বহুভুজের বাহুসমূহের সমান্তরাল কিন্তু সমানুপাতিক নহে। সুতরাং নূতন বহুভুজের বাহুসমূহ O বিন্দুতে প্রযুক্ত বলসমূহের নির্দেশক হইতে পারে না।

11-23. বলের সামান্তরিক সূত্র এবং ত্রিভুজ সূত্রের প্রয়োগের কয়েকটি দৃষ্টান্ত :—

(1) দুইটি সমান বলের লব্ধি তাহাদের অন্তর্ভূত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

এই ক্ষেত্রে বল-সামান্তরিক রম্বসে পরিণত হয় এবং রম্বসের কর্ণ তাহার কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(2) কোন বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে তাহা হইলে যে-কোন দুইটি বলের মানের সমষ্টি তৃতীয় বলের মান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না।

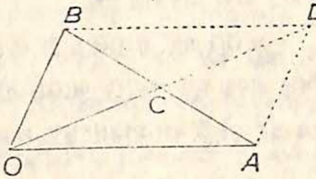
প্রমাণ : সাম্যাবস্থায় তিনটি বলের মান ও দিক্ একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দ্বারা নির্দেশিত হয়। কিন্তু ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

(3) **তিনটি বলের লম্বাভিমুখী ত্রিভুজ** (Perpendicular Triangle of Forces) :

এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ তিনটি বল যদি কোন ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহুর অনুপাতে হয় এবং ঐ বাহুগুলির লম্বাভিমুখে (প্রত্যেকেই বহির্মুখী অথবা প্রত্যেকেই অন্তর্মুখী) হয়, তাহা হইলে বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকে।

ত্রিভুজটিকে এমনভাবে এক সমকোণ পরিমাণ ঘুরাইয়া দাও যেন ইহার বাহুগুলি বল তিনটির সমান্তরাল হয়। এই নূতন অবস্থানে ত্রিভুজের বাহুগুলির মান ও দিক্ বল তিনটির মান ও দিক্ নির্দেশ করে। অতএব বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।

(4) O বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বল OA এবং OB রেখার দ্বারা প্রদর্শিত হইলে বল দুইটির লব্ধি O বিন্দু এবং AB রেখার মধ্যবিন্দুর যোজক সরল রেখা OC-র দ্বিগুণ দ্বারা প্রদর্শিত হইবে।

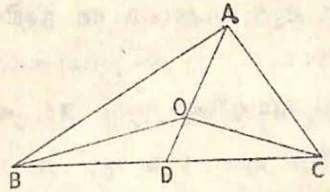


OADB সামান্তরিক সম্পূর্ণ করিলে OD কর্ণ OA এবং OB বলের লব্ধি নির্দেশ করে। কিন্তু সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় তাহাদের উভয়ের মধ্যবিন্দু C-তে ছেদ করে। অতএব OD = 2OC.

অর্থাৎ লব্ধি OC-র দ্বিগুণ দ্বারা প্রদর্শিত হয়।

প্রয়োগ। একটি কণা Oকে ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরে কোথায় স্থাপন করিলে OA, OB এবং OC রেখার দ্বারা প্রদর্শিত বলের ক্রিয়ার ফলে কণাটি স্থিরাবস্থায় থাকিবে?

EC রেখার মধ্যবিন্দু D লও; এখন OB এবং OC বলের লব্ধি 2OD-র দ্বারা প্রদর্শিত হয়। O বিন্দু স্থির থাকিতে হইলে 2OD বল OA বলের সমান ও বিপরীতমুখী হইতে হইবে। অতএব O বিন্দু AD মধ্যমার উপর এমন অবস্থানে আছে যেখানে OA = 2OD

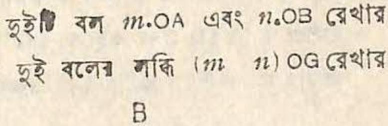


$$AD - OD = 2OD \text{ অর্থাৎ } 3OD = AD \quad \therefore \quad OD = \tfrac{1}{3}AD$$

আবার অনুরূপে O অপর দুইটি মধ্যমার উপরও থাকিবে। O বিন্দু মধ্যমা তিনটির ছেদবিন্দু। (এই বিন্দুকে ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র বলে)।

দ্রষ্টব্য। ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমার ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের ভর কেন্দ্র বলে।

* 5) যদি কোন বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বল $m.OA$ এবং $n.OB$ রেখার দ্বারা প্রদর্শিত হয় তাহা হইলে এই দুই বলের লব্ধি $(m \quad n)$ OG রেখার দ্বারা নির্ণীত হইবে। এখানে G বিন্দু AB রেখার উপর এমন একটি বিন্দু যেন $m.AG = n.BG$



প্রমাণ। বলের ত্রিভুজ-সূত্র অনুসারে, $m.OA$ দ্বারা প্রদর্শিত বল

m.OG এবং m.GA দ্বারা প্রদর্শিত বলদ্বয়ের লব্ধি।

n OB দ্বারা প্রদর্শিত বল

n.OG এবং n.GB দ্বারা প্রদর্শিত বলদ্বয়ের লব্ধি।

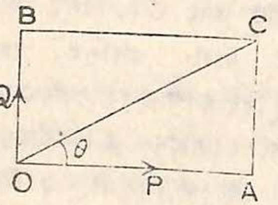
কিন্তু প্রদত্ত শর্তানুসারে m.GA বল n GB বলের সমান ও বিপরীতমুখী, অতএব এই দুইটি বল সাম্যাবস্থায় আছে।

এখন, নির্ণেয় লব্ধি m.OG এবং n.OG-এর লব্ধি

$\therefore$ নির্ণেয় লব্ধি $=(m+n)$.OG

11·24. এখন আমরা বিনা অঙ্কনে দুইটি বলের লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয়ের সূত্র প্রমাণ করিব।

(ক) একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত পরস্পর লম্বাভিমুখী দুইটি বল P এবং Q-এর লব্ধি নির্ণয় করিতে হইবে।



মনে কর, OA এবং OB রেখাদ্বয়, O বিন্দুতে প্রযুক্ত P এবং Q বল দুইটিকে নির্দেশ করে।

OACB সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর এবং OC যুক্ত কর।

এখন, বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে OC কর্ণ P এবং Q বলের লব্ধি R নির্দেশ করে। OC রেখা OA রেখার সহিত যে-কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে θ দ্বারা নির্দেশ করি।

R এবং θ নির্ণয় করিতে হইবে।

যেহেতু AC রেখা OB রেখার সমান এবং সমান্তরাল, অতএব AC রেখা Q বলের মান এবং দিক্ নির্দেশ করে।

সমকোণী ত্রিভুজ OAC হইতে, $OC^2 = OA^2 + AC^2$

অর্থাৎ $R^2 = P^2 + Q^2 \quad \therefore \quad R = \sqrt{P^2 + Q^2}$ ....(1)

$\tan\theta = \frac{AC}{OA} = \frac{Q}{P}$ ......(2)

সমীকরণ (1) এবং (2) লব্ধি বলের মান ও দিক্ প্রকাশ করে।

অনুসিদ্ধান্ত। Q = P হইলে $R^2 = P^2 + P^2 = 2P^2$, $R = P\sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{P}{P} = 1, \quad \theta = 45°$

উদাহরণ :

একটি বিন্দুতে 10 পাউণ্ড-ভার, 10 পাউণ্ড-ভার এবং 5 পাউণ্ড-ভার তিনটি বল ক্রিয়া করিতেছে ; প্রথম ও দ্বিতীয় বলের অন্তর্ভূক্ত কোণ 90° এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় বলের অন্তর্ভূক্ত কোণ 45°। বল তিনটির লব্ধির মান নির্ণয় কর।

প্রথম ও দ্বিতীয় বলের লব্ধি $R_1=\sqrt{10^2+10^2}=10\sqrt{2}$ পাউণ্ডভার এবং R_1 প্রথম ও দ্বিতীয় বলের অন্তর্ভূক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

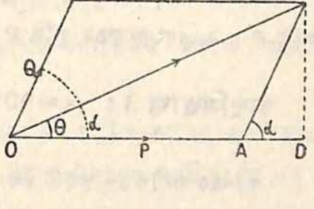
অতএব, $10\sqrt{2}$ পা. ভার এবং তৃতীয় বল 5 পা. ভার পরস্পর সমকোণে আছে।

বল তিনটির লব্ধি R হইলে

$R^2=(10\sqrt{2})^2+5^2=200+25=225$; $R=15$ পা. ভার।

(খ) একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বল P এবং Q পরস্পরের সহিত α-কোণ করিয়া আছে ; তাহাদের লব্ধি নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, OA এবং OB রেখাদ্বয়, O বিন্দুতে প্রযুক্ত P এবং Q বল দুইটিকে নির্দেশ করে।



OACB সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর, এবং OC যুক্ত কর। এখন বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে OC কর্ণ P এবং Q বলের লব্ধি R নির্দেশ করে। আবার যেহেতু AC রেখা OB রেখার সমান ও সমান্তরাল, অতএব AC রেখা Q বলের মান এবং দিক্ নির্দেশ করে। OC রেখা OA রেখার সহিত যে-কোণ উৎপন্ন করে তাহাকে θ দ্বারা নির্দেশ করি।

R এবং θ নির্ণয় করিতে হইবে।

D হইতে বর্ধিত OA রেখার উপর CD লম্ব টানা হইল।

এখন, OCD সমকোণী ত্রিভুজ হইতে

$$OC^2=OD^2+DC^2$$
$$=(OA+AD)^2+DC^2$$
$$=OA^2+2\,OA.AD+AD^2+DC^2$$
$$=OA^2+2\,OA.\frac{AD}{AC}AC+AC^2 \quad (\because AD^2+DC^2=AC^2)$$

$$=OA^2+2\,OA.\cos\alpha.\,AC+AC^2$$

$$=OA^2+AC^2+2OA\,AC.\cos\alpha$$

অর্থাৎ $R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$ ......(1).

$$\tan\theta=\frac{CD}{OD}=\frac{CD}{OA+AD}$$

কিন্তু $\frac{CD}{AC}=\sin\alpha \quad \therefore \quad CD=AC\sin\alpha$

$$\frac{AD}{AC}=\cos\alpha \quad \therefore \quad AD=AC\cos\alpha$$

সুতরাং $\tan\theta=\frac{AC\sin\alpha}{OA+AC\cos\alpha}=\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$......(2)

সমীকরণ (1) এবং (2) লব্ধি বলের মান ও দিক্ প্রকাশ করে।

অনুসিদ্ধান্ত 1 : $\alpha=0$ হইলে $R=P+Q$ এবং $\alpha=180°$ হইলে $R=P-Q$.

সুতরাং একই দিকে দুইটি বলের লব্ধি তাহাদের সমষ্টি এবং বিপরীতমুখী দুইটি বলের লব্ধি তাহাদের অন্তর।

অনুসিদ্ধান্ত 2 : কোন বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বল P এবং Q-এর বৃহত্তম লব্ধি $P+Q$ এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি $P-Q$.

অনুসিদ্ধান্ত 3 : $\alpha=90°$ হইলে, $R=\sqrt{P^2+Q^2}$; এবং $\tan\theta=\frac{Q}{P}$

(ক)-এর সমীকরণ দুইটি (খ) হইতে এইরূপে পাওয়া যায়।

উদাহরণ : 5 পাউণ্ড এবং 7 পাউণ্ড-ভারের দুইটি বল পরস্পরের সহিত 60° কোণে আছে : (i) তাহাদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।

(ii) বল দুইটি 120° কোণে থাকিলে লব্ধি কত হইবে ?

(i) $R^2=5^2+7^2+2.5.7\cos 60°=25+49+2.5.7\,\frac{1}{2}$

$$=25+49+35=109$$

$\therefore\quad R=\sqrt{109}=10{\cdot}44$ পাউণ্ড-ভার (আসন্নমান)

(ii) $R^2=5^2+7^2+2.5.7\cos 120°=25+49+2.5.7\,(-\frac{1}{2})$

$$=25+49-35=39$$

$\therefore\quad R=\sqrt{39}=6{\cdot}245$ পাউণ্ড-ভার (আসন্নমান)

অনুসিদ্ধান্ত 4 : $Q=P$ হইলে $R^2=P^2+P^2+2P.P.\cos\alpha$

$$=2P^2(1+\cos\alpha)=4P^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore\quad R=2P\cos\frac{\alpha}{2}$$

অনুশীলনী : দেখাও যে $\theta=\frac{\alpha}{2}$.

প্রশ্নমালা 10

1. নিম্নের উদাহরণসমূহে P এবং Q দুইটি বল, α তাহাদের অন্তর্ভূত কোণ এবং R লব্ধি

(i) $P=12, Q=5, \alpha=90°$; R নির্ণয় কর।

(ii) $P=16, R=65$ $\alpha=90°$; Q নির্ণয় কর।

(iii) $P=7, Q=8, \alpha=60°$; R নির্ণয় কর।

(iv) $P=3, Q=5, R=7$; α নির্ণয় কর।

(v) $P=7, R=13, \alpha=60°$; Q নির্ণয় কর।

2 কোন বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বলের মান 15 পা. ভার এবং 9 পা. ভার ; তাহাদের (i) বৃহত্তম লব্ধি এবং (ii) ক্ষুদ্রতম লব্ধি নির্ণয় কর।

3. 24 পা এবং 7 পা. ভারের বল পরস্পর লম্বাভিমুখী হইলে তাহাদের লব্ধি কত ?

4. একটি কণার উপর 40, 16, 35 এবং 28 পাউণ্ড-ভারের বল যথাক্রমে উত্তর, দক্ষিণ, পূর্ব এবং পশ্চিম দিকে প্রযুক্ত হইলে উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

5. একটি কণার উপর 10 একক এবং $10\sqrt{2}$ একক ভার বল পরস্পরের সহিত 135° কোণে প্রযুক্ত হইলে তাহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

6. একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি বল পরস্পরের সহিত 60° কোণ করিয়া আছে ; তাহাদের লব্ধি $5\sqrt{3}$ পা. এবং একটি বল 5 পা., অপরটি নির্ণয় কর।

7. দুইটি বলের বৃহত্তম লব্ধি 14 পা. ভার ; বল দুইটি লম্বাভিমুখী প্রযুক্ত হইলে তাহাদের লব্ধি 10 পা. ভার। বল দুইটি নির্ণয় কর।

8. দুইটি বল বিপরীত দিকে প্রযুক্ত হইলে তাহাদের লব্ধি 7 পা. ভার কিন্তু লম্বাভিমুখে প্রযুক্ত হইলে লব্ধি 13 পা. ভার। বল দুইটি নির্ণয় কর।

9. দুই বলের বৃহত্তম লব্ধি 31 গ্রাম-ভার এবং ক্ষুদ্রতম লব্ধি 17 গ্রাম ভার। বল দুইটি লম্বাভিমুখে প্রযুক্ত হইলে তাহাদের লব্ধি কত হইবে ?

10 একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত 7 পা., 5 পা. এবং 8 পা. ভারের বল সাম্যাবস্থায় আছে ; দ্বিতীয় ও তৃতীয় বলের অন্তর্বর্তী কোণ নির্ণয় কর।

[সঙ্কেত : মনে কর, নির্ণেয় কোণ α.

বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে বলিয়া 5 পা. এবং 8 পা. ভার বলের লব্ধি 7 পা. ভার বলের সমান ও বিপরীতমুখী।

এখন যেহেতু 5 পা. এবং 8 পা. ভার বলের লব্ধি 7 পা. ভার

$\therefore$ $R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$ সূত্র হইতে

$$7^2=5^2+8^2+2.5.8\cos\alpha$$

ইহা হইতে α নির্ণয় কর।]

11. একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত 6, 8 এবং 10 গ্রাম ভারের বল সাম্যাবস্থায় আছে ; প্রথম ও দ্বিতীয় বলের অন্তর্বর্তী কোণ নির্ণয় কর।

12. A এবং B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু ; একটি কণা P-এর উপর AP এবং PB-এর অনুপাতে দুইটি বল প্রয়োগ করিলে দেখাও যে P-এর যে-কোন অবস্থানেই লব্ধির মান ও দিক্ ধ্রুবক (constant)।

13. F এবং E বিন্দু ABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুর মধ্যবিন্দু। কোন কণাতে প্রযুক্ত দুইটি বলের মান ও দিক্ যদি BE এবং CF দ্বারা প্রদর্শিত হয়, তাহা হইলে লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

14. F এবং E বিন্দু ABC ত্রিভুজের AB এবং AC বাহুর মধ্যবিন্দু। কোন কণাতে প্রযুক্ত দুইটি বলের মান ও দিক যদি BE এবং FC দ্বারা প্রদর্শিত হয়, তাহা হইলে লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

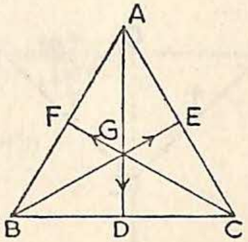
15. ABCDEF একটি সমবাহু ষড়ভুজ, ইহার কৌণিক বিন্দু A-তে প্রযুক্ত পাঁচটি বলের মান ও দিক্ যদি AB, AC, AD, AE, AF দ্বারা প্রদর্শিত হয়, তাহাদের লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

16. ABCD সামান্তরিকের অভ্যন্তরে একটি কণা P-এর উপর চারিটি বল প্রযুক্ত হইয়াছে ; ইহাদের মান ও দিক্ যদি PA, PC এবং BP, DP-র দ্বারা প্রদর্শিত হয়, দেখাও যে কণাটি যে-কোন অবস্থানেই স্থির থাকিবে।

*17. একটি কণা P-কে ABCD চতুর্ভুজের অভ্যন্তরে কোথায় স্থাপন করিলে PA, PB, PC এবং PD রেখার দ্বারা প্রদর্শিত বলের ক্রিয়ার ফলে কণাটি স্থিরাবস্থায় থাকিবে।

18. দেখাও যে কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু ও বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর যোজক সরল রেখা দ্বারা নির্দেশিত বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।

সঙ্কেত : এই তিনটি বল একবিন্দুগামী।



BG এবং CG-এর লব্ধি 2DG

অর্থাৎ $\frac{2}{3}$BE এবং $\frac{2}{3}$CF-এর লব্ধি $2.\frac{1}{3}$DA.

$\therefore$ BE এবং CF-এর লব্ধি DA

DA এবং AD দুইটি সমান ও বিপরীতমুখী বল।

অতএব BE, CF এবং AD-র দ্বারা নির্দেশিত বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে।

প্রকারান্তর : বল তিনটি এক বিন্দুগামী

এখন $\overline{AD}=\overline{AC}+\overline{CD}=\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{CB}$

$\overline{BE}=\overline{BA}+\overline{AE}=\overline{BA}+\frac{1}{2}\overline{AC}$

$\overline{CF}=\overline{CB}+\overline{BF}=\overline{CB}+\frac{1}{2}\overline{BA}$

$\therefore$ তিনটি বল $=\frac{3}{2}(\overline{BA}+\overline{AC}+\overline{CB})$

$=\frac{3}{2}\times 0=0$ [বলের ত্রিভুজসূত্র]

19. ABCD একটি বর্গক্ষেত্র ; AB, CB, AD এবং DC বাহু বরাবর সমান বল P ক্রিয়া করে। ইহদের লব্ধি নির্ণয় কর। [U. P. বোর্ড, 1954]

সঙ্কেত : AB এবং AD বরাবর ক্রিয়মাণ P বল দুইটির লব্ধি $P\sqrt{2}$ এবং ইহা AC বরাবর ক্রিয়মাণ।

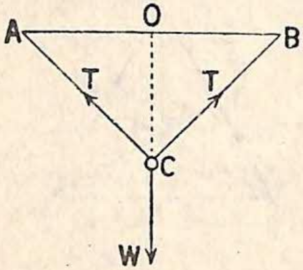
DC এবং CB বরাবর সমান বল P দুইটির লব্ধি $P\sqrt{2}$ বর্ধিত DC এবং CBর অন্তর্বর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

এখন নির্ণের লব্ধি C বিন্দুতে ক্রিয়মাণ $P\sqrt{2}$ এবং $P\sqrt{2}$ বলদ্বয়ের লব্ধি ; ইহার মান 2P এবং ইহা DC বরাবর ক্রিয়মাণ।

20. l দৈর্ঘ্যের একটি সরু সূতার দুই প্রান্ত একই অনুভূমিক তলে c দূরত্বে স্থিত দুইটি বিন্দুতে আবদ্ধ আছে। একটি মসৃণ ক্ষুদ্র ভারহীন আংটি দড়িতে সরিতে পারে এবং আংটি হইতে W ভার অবাধভাবে ঝুলিতেছে। দেখাও যে দড়ির টান $\dfrac{lW}{2\sqrt{l^2-c^2}}$

সঙ্কেত : যেহেতু দড়িটি মসৃণ আংটির ভিতর দিয়া গিয়াছে, দড়ির উভয় অংশে টান সমান। মনে কর, CA এবং CB উভয় অংশে টান T,

এখন, $2T \cos \frac{C}{2} = W$........(1)



এবং $\cos \frac{C}{2} = \frac{CO}{BC} = \frac{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}}{\frac{l}{2}}$

$= \frac{\sqrt{l^2 - c}}{l}$ .. (2)

সমীকরণ (1) হইতে এখন T এর মান পাওয়া যাইবে।

21. E, F, G, H যথাক্রমে একটি চতুর্ভুজের AB, BC, CD এবং DA বাহুর মধ্যবিন্দু। EG, FH এবং DB-র দ্বারা প্রদর্শিত বল একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে। দেখাও যে তাহারা সাম্যাবস্থায় আছে।

22. A, B, C তিনটি মসৃণ খুঁটি এক উল্লম্ব প্রাচীরে একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠিত করিয়া সাজান আছে এবং BC অনুভূমিক ; দুইটি সমান ভার প্রত্যেকে w একটি দড়ির দুইপ্রান্তে সংলগ্ন আছে এবং দড়িটি খুঁটিসমূহের উপর দিয়া গিয়াছে। খুঁটিগুলির উপর চাপ নির্ণয় কর।

Ans. A-র উপর চাপ $W\sqrt{3}$, B এবং C প্রত্যেকের উপর চাপ $\frac{W}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)$.

23. দুইটি সমান বল একবিন্দুতে ক্রিয়া করে। যদি তাহাদের লব্ধির বর্গ তাহাদের গুণফলের তিনগুণ হয় তাহা হইলে বল দুইটির অন্তর্বর্তী কোণ নির্ণয় কর।

24. 3P এবং 2P মানের দুইটি বলের লব্ধি R। যদি প্রথম বল দ্বিগুণ করা হয় তাহা হইলে লব্ধির মান দ্বিগুণ হয়, তাহাদের অন্তর্বর্তী কোণ নির্ণয় কর।

25 এক বিন্দুতে দুইটি বল ক্রিয়া করে এবং তাহারা এরূপ যে যদি একটির দিক্ বিপরীত করা হয় তাহা হইলে লব্ধির দিক্ এক সমকোণ পরিমাণ ঘুরিয়া যায়। দেখাও যে দুইটি বলের মান সমান হইবে।

সমাধান :—ধর, P এবং Q দুইটি বল, α তাহাদের অন্তর্বর্তী কোণ।

মনে কর, প্রথম ক্ষেত্রে লব্ধি বল P-এর সঙ্গে θ কোণ করে, তাহা হইলে দ্বিতীয় ক্ষেত্রে লব্ধি বল P-এর সঙ্গে $90° - \theta$ কোণ করে এবং তখন P ও Q-এর অন্তর্বর্তী কোণ $180° - \alpha$.

এখন, $\tan\theta=\dfrac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$ ....(1)

$$\tan(90°-\theta)=\frac{Q\sin(180°-\alpha)}{P+Q\cos(180°-\alpha)}$$

$$\therefore\ \cot\theta=\frac{Q\sin\alpha}{P-Q\cos\alpha}\ \text{........(2)}$$

(1) এবং (2) গুণ করিয়া

$$1=\frac{Q^2\sin^2\alpha}{P^2-Q^2\cos^2\alpha}$$

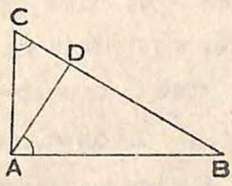
অথবা, $P^2-Q^2\cos^2\alpha=Q^2\sin^2\alpha$, $P^2=Q^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

$\therefore\ P^2=Q^2$ অর্থাৎ $P=Q$.

26. ABC ত্রিভুজের A কোণ সমকোণ ; AD সরলরেখা BC-র উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে AB বরাবর $\dfrac{1}{AB}$ বল এবং AC বরাবর $\dfrac{1}{AC}$ বলের লব্ধি AD বরাবর $\dfrac{1}{AD}$.

সমাধান : $R^2=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{BC^2}{AB^2AC^2}$ $\therefore\ R=\dfrac{BC}{AB\cdot AC}$

কিন্তু $AB\cdot AC=BC.AD$ $\therefore\ R=\dfrac{1}{AD}$.



$\tan\theta=\dfrac{1}{AC}\div\dfrac{1}{AB}=\dfrac{AB}{AC}=\tan C=\tan DAB$.

অতএব লব্ধি AD বরাবর ক্রিয়া করে।

27. পরস্পরের সহিত α কোণ করিয়া এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ দুইটি বল P এবং Q এর লব্ধি $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$. যখন তাহারা $90°-\alpha$ কোণে ক্রিয়া করে তখন লব্ধি $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$ হইলে প্রমাণ কর যে $\tan\alpha=\dfrac{m-1}{m+1}$.

সঙ্কেত :—$(2m+1)^2(P^2+Q^2)=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$ ....(1)

$(2m-1)^2(P^2+Q^2)=P^2+Q^2+2PQ\sin\alpha$ ....(2)

(1) হইতে $2PQ\cos\alpha=(P^2+Q^2)\{(2m+1)^2-1\}$ ....(3)

(2) হইতে $2PQ\sin\alpha=(P^2+Q^2)\{(2m-1)^2-1\}$ ....(4)

(4) কে (3) দিয়া ভাগ করিয়া সরল করিলে উত্তর পাওয়া যাইবে।

28. P এবং Q বলের লব্ধি R ; যদি Q কে দ্বিগুণ করা হয়, নূতন লব্ধি P-এর লম্বাভিমুখে। প্রমাণ কর যে Q=R.

সমাধান : $R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$........(1)

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে

$$\tan 90^\circ=\frac{2Q\sin\alpha}{P+2Q\cos\alpha} \text{ অর্থাৎ } \cot 90^\circ=\frac{P+2Q\cos\alpha}{2Q\sin\alpha}$$

$\therefore\ P+2Q\cos\alpha=0$ .... (2)

(1) হইতে $R^2=Q^2+P(P+2Q\cos\alpha)=Q^2+0$ $\quad\therefore\ R=Q$

29. দুইটি বল P এবং Q এরূপ কোণ করিয়া ক্রিয়া করে যে R=P. দেখাও যে P কে দ্বিগুণ করিলে নূতন লব্ধি Q-এর লম্বাভিমুখে হইবে।

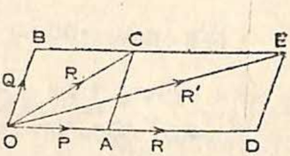
সমাধান : যেহেতু R=P $\quad\therefore\ P^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha$

$\therefore\ Q+2P\cos\alpha=0$

যখন 2P এবং Q বল ক্রিয়া করে তখন লব্ধি যদি Q-এর সহিত θ কোণ করে তাহা হইলে

$$\tan\theta=\frac{2P\sin\alpha}{Q+2P\cos\alpha}=\frac{2P\sin\alpha}{0}=\infty$$

30. দুইটি বল P এবং Q এর লব্ধি R প্রথম বল P-এর সঙ্গে একটি কোণ করে। যদি P বলকে R পরিমাণ বর্ধিত করা হয়, দেখাও যে লব্ধি P+R-এর সহিত পূর্বের অর্ধেক কোণ করে এবং এই লব্ধির পরিমাণ নির্ণয় কর।



সঙ্কেত : OC=AD=CE

$\therefore\ \angle COE=\angle CEO=\angle EOD=\frac{\theta}{2}$

Cosine সূত্র সাহায্যে : $OE^2=OC^2+CE^2-2OC.CE\cos(180^\circ-\theta)$

$R'^2=R^2+R^2+2R^2\cos\theta=2R^2(1+\cos\theta)=4R^2\cos^2\frac{\theta}{2}$

$$\therefore\ R'=2R\cos\frac{\theta}{2}$$

31. ABCD একটি সামান্তরিক। প্রমাণ কর যে, AB, CD, AC এবং DB-র দ্বারা প্রদর্শিত বলের মান, দিক্ এবং অবস্থান 2AB-র দ্বারা প্রদর্শিত হয়।

32. এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে। বৃহত্তম বল 5 পা॰ ভার এবং ক্ষুদ্রতম বল 3 পা॰ ভার এবং ইহাদের মধ্যে দুইটি বলের অন্তর্বর্তী কোণ সমকোণ ; তৃতীয় বলটি নির্ণয় কর।

সঙ্কেত :—বলের ত্রিভুজ সূত্র ব্যবহার কর।

33. O বিন্দুতে প্রদত্ত দিকে ক্রিয়মাণ তিনটি বল সাম্যাবস্থায় আছে। যদি O বিন্দুর ভিতর দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হয় এবং ইহা তিনটি বলের ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর যে বলগুলি ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির অনুপাতে।

সমাধান :

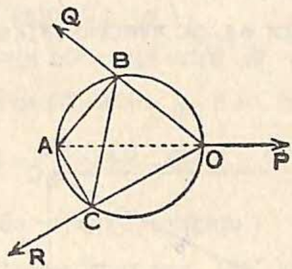
$$\frac{P}{\sin QOR}=\frac{Q}{\sin ROP}=\frac{R}{\sin POQ}$$

এখন $\sin QOR=\sin(180°-A)=\sin A$

$\sin ROP=\sin(180°-AOC)=\sin AOC=\sin B$

$\sin POQ=\sin(180°-AOB)=\sin AOB=\sin C$

$\therefore \dfrac{P}{\sin A}=\dfrac{Q}{\sin B}=\dfrac{R}{\sin C}$



কিন্তু $\sin A : \sin B : \sin$

$=a : b : c$

অতএব $\dfrac{P}{BC}=\dfrac{Q}{CA}=\dfrac{R}{AB}.$

———

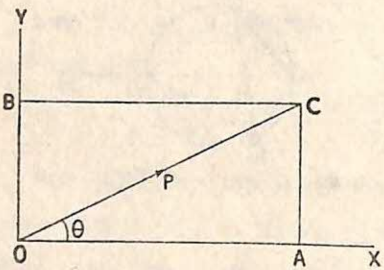
দ্বাদশ পরিচ্ছেদ | বলের বিশ্লেষণ
Resolution of a Force

12-1. দুইটি প্রদত্ত বলের লব্ধি নির্ণয়ের উপায় আমরা দেখিয়াছি। অনেক সময়ে দুইটি প্রদত্ত দিকে একটি বলের উপাংশ নির্ণয়ের প্রয়োজন হয়।

দুইটি পরস্পর লম্বাভিমুখী দিকে উপাংশ নির্ণয়ের প্রশ্ন সর্বাধিক প্রয়োজনীয়। প্রথমে আমরা ইহার আলোচনা করিব।

12-2. দুই পরস্পর লম্বাভিমুখী দিকে বলের বিশ্লেষণ

মনে কর, OC সরলরেখা কোনও প্রদত্ত বল P প্রদর্শন করে। প্রদত্ত দিক্ OX অভিমুখে এবং OX-এর লম্বাভিমুখে P বলের উপাংশ নির্ণয় করিতে হইবে। OC যেন OX সরল রেখার সঙ্গে θ কোণ করিয়া আছে।



OX সরল রেখার উপর CA লম্ব অঙ্কিত কর। OACB আয়তক্ষেত্র সম্পূর্ণ কর।

বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে OA এবং OB সরল রেখাদ্বয় প্রদত্ত বল P-এর উপাংশ প্রদর্শন করে।

এখন, $\frac{OA}{OC}=\cos\theta \quad \therefore \quad OA=OC\cos\theta=P\cos\theta.$

আবার, $OB=AC$, এবং $\frac{AC}{OC}=\sin\theta.$

$$\therefore \quad OB=AC=OC\sin\theta=P\sin\theta$$

তাহা হইলে আমরা এই সূত্র পাই যে,

সূত্র : একটি বলকে পরস্পর লম্বাভিমুখী দুই দিকে বিশ্লেষণ করিলে, P বল যে দিকের সঙ্গে θ কোণে আছে সেদিকে উপাংশ $P\cos\theta$ এবং ইহার লম্বাভিমুখে উপাংশ $P\sin\theta$.

12-3. **সংজ্ঞা। বলের বিশ্লেষিতাংশ** (Resolved part)

কোনও প্রদত্ত দিকে একটি বলের বিশ্লেষিতাংশ বলিলে সেই বল বুঝায় যাহার সহিত প্রদত্ত দিকের লম্বাভিমুখে একটি বল গ্রহণ করিয়া প্রদত্ত বলকে লব্ধি পাওয়া যায়।

12-2 অনুচ্ছেদের চিত্রে OC সরল রেখা P বল প্রদর্শন করে এবং OA সরল রেখা OX-এর দিকে P বলের বিশ্লেষিতাংশ প্রদর্শন করে ; কারণ, P বলের একটি উপাংশ OX-এর দিকে এবং অপর উপাংশ OX-এর লম্বাভিমুখে।

দ্রষ্টব্য : OC সরল রেখা যদি বল নির্দেশ করে তাহা হইলে OX-এর উপর OC সরল রেখার লম্ব অভিক্ষেপ OX-এর দিকে প্রদত্ত বলের বিশ্লেষিতাংশ নির্দেশ করে।

লক্ষ্য কর, কোন বলের লম্বাভিমুখে বিশ্লেষিতাংশ 0 (শূন্য)।

12-4. **উদাহরণ :** (1) বলের দিকের সঙ্গে 60° কোণে আছে এই রকম দিকে 10 পা. ভার বলের বিশ্লেষিতাংশ $=10\cos 60^\circ=10\times\frac{1}{2}=5$ পা. ভার।

অপর বিশ্লেষিতাংশ $=10\sin 60^\circ=10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\times\sqrt{3}=5\times1{\cdot}732$

$=8{\cdot}66$ পা. ভার (আসন্নমান)

(2) 16 পাউণ্ড-ভারের একটি বল একটি প্রদত্ত দিকের সঙ্গে 135° কোণ করিয়া আছে। এইদিকে এবং উহার লম্বাভিমুখে বলের বিশ্লেষিতাংশ নির্ণয় কর।

মনে কর, প্রদত্ত দিকে বিশ্লেষিতাংশ X এবং তাহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষিতাংশ Y, তাহা হইলে

$$X=16\cos 135^\circ=16\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{16\sqrt{2}}{2}\text{ পা. ভার}$$

$$=-8\sqrt{2}\text{ পা. ভার।}$$

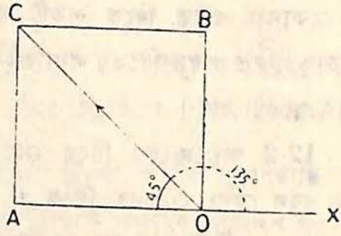
$$Y=16\sin 135^\circ=16.\frac{1}{\sqrt{2}}=8\sqrt{2}\text{ পা. ভার।}$$

দ্রষ্টব্য : X ঋণাত্মক ; ইহাতে এই বুঝায় যে বিশ্লেষিতাংশ প্রদত্ত দিকের বিপরীত অভিমুখে।

চিত্র সাহায্যে ইহা পরিষ্কার বুঝা যাইবে।

OC সরল রেখা দ্বারা 16 পা. ভার বল নির্দেশ করা হইল ; OX প্রদত্ত দিক্।

XO-কে বাড়াইয়া দাও এবং OACB আয়তক্ষেত্র সম্পূর্ণ কর। বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে OA এবং OB বিশ্লেষিতাংশ নির্দেশ করে।



এখন $\angle AOC = 180° - 135° = 45°$

OA সরল রেখার দিকে বিশ্লেষিতাংশ

$= OA = OC \cos 45° = 16 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= 8\sqrt{2}$ পা. ভার।

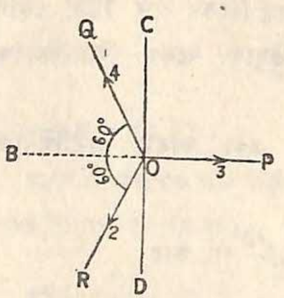
OB সরল রেখার দিকে বিশ্লেষিতাংশ $= OB = AC = OC \sin 45° = 16 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= 8\sqrt{2}$ পা. ভার।

কিন্তু OA সরল রেখার দিকে $8\sqrt{2}$ পা. ভার বল OX যে দিকে তাহার বিপরীত অভিমুখে, সুতরাং এই বল ঋণাত্মক ধরিতে হইবে।

অতএব $X = -8\sqrt{2}$ পা. ভার এবং $Y = 8\sqrt{2}$ পা. ভার।

(3) একটি বিন্দুতে 3 পা., 4 পা. এবং 2 পা. ভারের বল প্রযুক্ত হইয়াছে। যে-কোন দুইটি বলের অন্তর্ভূত কোণ 120°। বলগুলি প্রথম বলের দিকে এবং তাহার লম্বাভিমুখে দুইটি বলে প্রকাশ কর এবং তাহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।



মনে কর, OP, OQ এবং OR পরস্পর 120° কোণ করিয়া আছে এবং ইহাদের দিকে যথাক্রমে, 3, 4 এবং 2 পা. বল প্রযুক্ত হইয়াছে। POকে B পর্যন্ত বর্ধিত কর এবং OP-এর উপর লম্ব COD অঙ্কিত কর। এখন $\angle BOQ = \angle BOR = 60°$

OB এবং OC-এর দিকে 4 পা. বলের বিশ্লেষিতাংশ $4 \cos 60°$ এবং $4 \sin 60°$.

OB এবং OD-এর দিকে 2 পা. বলের বিশ্লেষিতাংশ

$2 \cos 60°$ এবং $2 \sin 60°$

OP-র দিকে পাইতেছি $3 - 4 \cos 60° - 2 \cos 60° = 3 - 6 \cos 60°$
$= 3 - 6 \times \frac{1}{2} = 0$

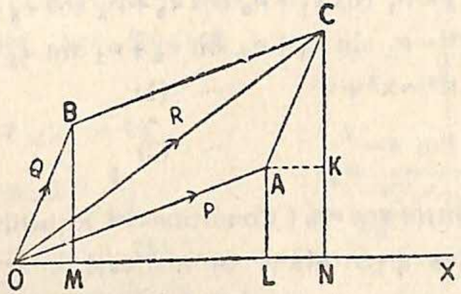
OP-র লম্বাভিমুখে পাইতেছি $4 \sin 60° - 2 \sin 60° = 2 \sin 60°$

$= 2 . \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ পা

∴ নির্ণেয় লব্ধি OC-এর দিকে $\sqrt{3}$ পা. ভারের সমান বল।

12-5. দুইটি বল এবং তাহাদের লব্ধিকে কোনও একদিকে বিশ্লেষণ করিলে বল দুইটির বিশ্লেষিতাংশের বীজগাণিতিক যোগফল লব্ধির বিশ্লেষিতাংশের সমান।

মনে কর, OA, OB এবং OC যথাক্রমে দুইটি বল P, Q এবং তাহাদের লব্ধি R প্রদর্শন করে এবং OX প্রদত্ত দিক্।



OX রেখার উপর AL, BM এবং CN লম্ব অঙ্কিত কর। তাহা হইলে OL, OM এবং ON রেখা P, Q এবং R বলের বিশ্লেষিতাংশ নির্দেশ করে।

CN-এর উপর AK লম্ব অঙ্কিত করা হইয়াছে। এখন, OX সরল রেখার দিকে P বলের বিশ্লেষিতাংশ + Q বলের বিশ্লেষিতাংশ

$= OL + OM$

$= OL + AK$ [OBM এবং ACK ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম $\therefore$ $OM = AK$]

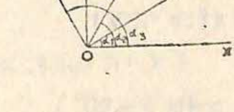
$= OL + LN$

$= ON =$ লব্ধি R বলের বিশ্লেষিতাংশ।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ এক বিন্দুতে প্রযুক্ত বহু সংখ্যক বল এবং তাহাদের লব্ধিকে কোনও এক দিকে বিশ্লেষণ করিলে উপাংশসমূহের বিশ্লেষিতাংশের বীজগাণিতিক যোগফল লব্ধির বিশ্লেষিতাংশের সমান।

***12-6. কোন বিন্দুতে প্রযুক্ত যে-কোন সংখ্যক বলের লব্ধি নির্ণয়**

মনে কর, O বিন্দুতে P_1, P_2, P_3,….বল প্রযুক্ত হইয়াছে।



O বিন্দুর ভিতর দিয়া OX এবং OY দুইটি পরস্পর লম্বাভিমুখী রেখা অঙ্কিত কর। মনে কর, P_1, P_2, P_3,….বলসমূহ OX-এর সহিত α_1, α_2, α_3,….কোণ করিয়াছে।

ধর, বলসমূহের লব্ধি R এবং ইহা OX সরলরেখার সহিত θ কোণ করিয়া আছে। R এবং θ নির্ণয় করিতে হইবে।

OX এবং OY-এর দিকে বলসমূহ বিশ্লেষণ কর এবং বিশ্লেষিতাংশসমূহের সমষ্টিকে X এবং Y ধর।

তাহা হইলে,

$$X = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \cdots$$

$$Y = P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3 + \cdots$$

এখন, $$R^2 = X^2 + Y^2 \qquad \cdots \quad (1)$$

$$\tan \theta = \frac{Y}{X} \qquad \cdots \quad (2)$$

12-7 সাম্যাবস্থার শর্ত (Conditions of Equilibrium)

একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত কতিপয় বল সাম্যাবস্থায় থাকিতে হইলে ইহা প্রয়োজন এবং যথেষ্ট যে দুই পরস্পর লম্বাভিমুখী দিকে বলসমূহের বিশ্লেষিতাংশের বীজগাণিতিক যোগফল পৃথক্‌ভাবে 0 (শূন্য হইবে)।

OX, OY দুইটি পরস্পর লম্বাভিমুখী সরলরেখা।

মনে কর, প্রযুক্ত বলসমূহের লব্ধি R এবং এই দুইদিকে X এবং Y তাহার বিশ্লেষিতাংশ, তাহা হইলে।

$$R^2 = X^2 + Y^2$$

আবার (12-4 অনুচ্ছেদের অনুসিদ্ধান্তানুসারে)

X = OX-এর দিকে বলসমূহের বিশ্লেষিতাংশের সমষ্টি

Y = OY-এর দিকে বলসমূহের বিশ্লেষিতাংশের সমষ্টি।

সাম্যাবস্থায় থাকিতে হইলে R অবশ্যই 0 (শূন্য)। অতএব $X^2 + Y^2 = 0$.

সুতরাং $X = 0$, $Y = 0$ (কারণ, কোন রাশির বর্গ ঋণাত্মক হইতে পারে না)।

বিপরীতক্রমে,

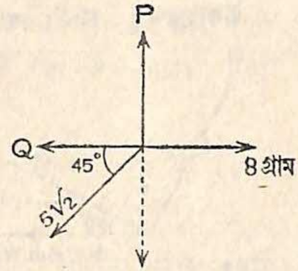
$X = 0$ এবং $Y = 0$ হইলে, $R = 0$; অতএব বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

দ্রষ্টব্য : (1) X শূন্য কিন্তু Y শূন্য না হইলে লব্ধি OX-এর লম্বাভিমুখী হইতে পারে।

($X = R\cos\theta$, $X = 0$ হইলে $R\cos\theta = 0$ $\therefore$ $R = 0$ অথবা $\cos\theta = 0$ অর্থাৎ $\theta = 90°$)

(2) দিক্ দুইটি লম্বাভিমুখী না হইলেও উপরোক্ত বর্ণনা সত্য। কারণ, বলসমূহ সাম্যাবস্থায় না থাকিলে তাহাদের লব্ধি প্রথম রেখা এবং দ্বিতীয় রেখা উভয়েরই লম্ব হইবে কিন্তু ইহা অসম্ভব।

উদাহরণ : একটি কণার উপর উত্তর দিকে P বল, পশ্চিম দিকে Q বল দক্ষিণ-পশ্চিম দিকে $5\sqrt{2}$ গ্রাম বল এবং পূর্বদিকে 8 গ্রাম বল প্রযুক্ত হইয়া কণাটি স্থির আছে। P এবং Q বল নির্ণয় কর।



বলসমূহকে পূর্ব এবং উত্তরদিকে বিশ্লেষণ করিলে

$$X = 8 - Q - 5\sqrt{2}\cos 45^\circ$$

$$= 8 - Q - 5\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 3 - Q \quad \dots\ \dots \quad (1)$$

$$Y = P - 5\sqrt{2}\sin 45^\circ = P - 5 \ \dots \ (2)$$

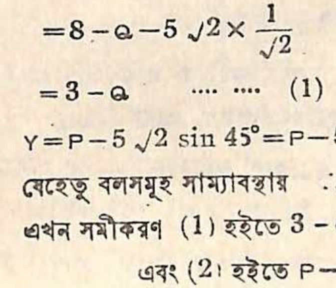
যেহেতু বলসমূহ সাম্যাবস্থায় $\therefore\ X = 0$ এবং $Y = 0$

এখন সমীকরণ (1) হইতে $3 - Q = 0 \quad \therefore\ Q = 3$ গ্রাম

এবং (2) হইতে $P - 5 = 0 \quad \therefore\ P = 5$ গ্রাম।

*12-8 যে কোন দুই প্রদত্ত দিকে একটি বলের বিশ্লেষণ

মনে কর, OC সরলরেখা প্রদত্ত F বলকে সূচিত করে। OC-র সহিত α এবং β কোণ করিয়া OA এবং OB-র দিকে F বলের উপাংশ নির্ণয় করিতে হইবে।



C-এর ভিতর দিয়া CM এবং CN সরলরেখা যথাক্রমে OB এবং OA-র সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত কর। এখন বলের সামান্তরিক সূত্র অনুসারে OMCN সামান্তরিকের OM এবং ON বাহুদ্বয় F-এর উপাংশ নির্দেশ করে। উপাংশ দুইটি P এবং Q হইলে,

যেহেতু MC, ON-এর সমান ও সমান্তরাল অতএব MC রেখাও Q-এর মান এবং দিক্ নির্দেশ কর। OMC ত্রিভুজে

$$\frac{OM}{\sin OCM} = \frac{MC}{\sin MOC} = \frac{OC}{\sin OMC}$$

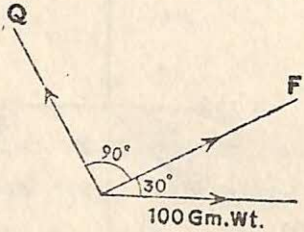
অর্থাৎ $$\frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{F}{\sin\{180^\circ - (\alpha + \beta)\}}$$

অর্থাৎ $\frac{P}{\sin\beta}=\frac{Q}{\sin\alpha}=\frac{F}{\sin(\alpha+\beta)}$

$$P=\frac{F\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)};\quad Q=\frac{F\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

লক্ষ্য কর : $\alpha+\beta=90^\circ$ হইলে $P=F\sin\beta=F\sin(90^\circ-\alpha)=F\cos\alpha$ এবং $Q=F\sin\alpha$.

উদাহরণ : 120° কোণে ক্রিয়মাণ দুইটি বলের লব্ধি ক্ষুদ্রতর বলের লম্বাভিমুখী। বৃহত্তর উপাংশটি 100 গ্রাম ভারের সমান ; অপর উপাংশ এবং লব্ধি নির্ণয় কর।



মনে কর, F লব্ধি বল এবং Q ক্ষুদ্রতর উপাংশ, তাহা হইলে,

[এখানে $P=100$ গ্রাম ভার, $\alpha=30^\circ$, $\beta=90^\circ$, $\alpha+\beta=120^\circ$; Q এবং F নির্ণয় করিতে হইবে]

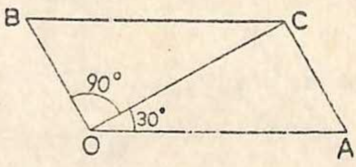
$$\frac{100}{\sin 90^\circ}=\frac{Q}{\sin 30^\circ}=\frac{F}{\sin 120^\circ}$$

$\therefore\ Q=100\sin 30^\circ=100\times\frac{1}{2}=50$ গ্রাম ভার,

$F=100\sin 120^\circ=100\times\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}$ গ্রাম ভার।

প্রকারান্তর—

প্রদর্শিত চিত্রে OA এবং OB উপাংশদ্বয় এবং OC লব্ধি বল নির্দেশ করে।



এই ক্ষেত্রে OCA একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং OA=100 গ্রাম ভার,

$OC=OA\cos 30^\circ=100\times\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}$ গ্রাম ভার।

$OB=AC=OA\sin 30^\circ=100\times\frac{1}{2}=50$ গ্রাম ভার

$\therefore$ অপর উপাংশ 50 গ্রাম ভার এবং লব্ধি $50\sqrt{3}$ গ্রাম ভার।

প্রশ্নমালা 11

1. নিম্নের উদাহরণসমূহের প্রত্যেকটিতে একটি বল এবং উহা প্রদত্ত দিকের সঙ্গে যে কোণ করিয়াছে তাহা দেওয়া আছে, প্রদত্ত দিকে এবং তাহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষিতাংশ নির্ণয় কর :—

(i) 10 পাউণ্ড ভার, 0° (iv) 14 আউন্স ভার, 60° (vii) 8 টন ভার, 135° (ii) 12 পাউণ্ড ভার, 30° (v) 16 হন্দর ভার, 90° (viii) 50 গ্রাম ভার, 150° (iii) $10\sqrt{2}$ গ্রাম ভার, 45° (vi) 20 কি. গ্রা. ভার, 120° (ix) 9 মিলিগ্রাম ভার, 180°.

2. 20 পাউণ্ড-ভারের একটি বল অনুভূমিক দিকের সঙ্গে 30° কোণে আছে। অনুভূমিক এবং উল্লম্ব দিকে ইহার বিশ্লেষিতাংশ নির্ণয় কর।

3. একটি মালগাড়ি রেল লাইনের উপর আছে। 20 টন ভারের একটি অনুভূমিক বল রেল লাইনের দিকের সঙ্গে 60° কোণে গাড়িটিকে টানিতেছে। রেল লাইনের দিকে কত বল গাড়িটিকে চালাইবার চেষ্টা করিবে?

4. ঊর্ধ্বাভিমুখী 30 পাউণ্ড-ভারের একটি বলকে দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ করা হইয়াছে। একটি উপাংশ অনুভূমিক দিকে এবং তাহার মান 10 পাউণ্ড ভার। অপর উপাংশের মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

5. একটি বল ঊর্ধ্বদিকের সঙ্গে 60° কোণ করিয়াছে। ঊর্ধ্বদিকে ইহার বিশ্লেষিতাংশ 50 পাউণ্ড-ভার হইলে অনুভূমিক দিকে বিশ্লেষিতাংশ কত?

6. 10 গ্রাম ভারের সমান একটি বল দুইটি রেখার অন্তর্ভূত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া আছে। অন্তর্ভূত কোণটি 120° হইলে এই দুই রেখার দিকে (i) উপাংশদ্বয় কত হইবে? (ii) বিশ্লেষিতাংশ কত হইবে?

7. উত্তর দিকে 10 পাউণ্ড-ভারের একটি বলের তিনটি উপাংশ আছে। উত্তর-পশ্চিম দিকে এবং পশ্চিমদিকে উপাংশ $5\sqrt{2}$ এবং 7 পাউণ্ড-ভার। তৃতীয় উপাংশ নির্ণয় কর।

সংকেত : মনে কর, নির্ণেয় উপাংশ বলের বিশ্লেষিতাংশ পূর্ব ও উত্তর দিকে যথাক্রমে X এবং Y, তাহা হইলে

$X-7-5\sqrt{2}\cos 45^\circ=0$ অর্থাৎ $X-7-5=0$, $X=12$

$Y+5=10$, $Y=5$

সুতরাং নির্ণেয় উপাংশ$=\sqrt{12^2+5^2}=13$ পা. ভার।

8. 1, 2, এবং 3 পাউণ্ড-ভার বল একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত হইয়াছে। যে-কোন দুইটি বলের অন্তর্ভূক্ত কোণ 120° হইলে ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

9. একটি বিন্দুতে পূর্ব দিকে 3 গ্রাম, উত্তর পূর্ব দিকে 12 $\sqrt{2}$ গ্রাম, দক্ষিণ-পশ্চিম দিকে 3 $\sqrt{2}$ গ্রাম ভারের সমান বল প্রযুক্ত হইয়াছে। ইহাদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।

10 1, 2, 3 এবং 4 গ্রাম ভারের সমান বল একটি বর্গক্ষেত্র ABCD-এর কেন্দ্র O বিন্দুতে প্রযুক্ত হইয়াছে এবং বলগুলি যথাক্রমে A, B, C, D বিন্দুর অভিমুখে ক্রিয়া করে। ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

11. একটি বিন্দুতে 3, 4 এবং 5 পাউণ্ড-ভারের সমান বল একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলির সমান্তরাল দিকে ক্রিয়া করে; ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

12. একটি বিন্দুতে তিনটি সমান P-মানের বল প্রযুক্ত হইয়াছে। মধ্যবর্তী বলটি অপর দুই বলের প্রত্যেকটির সঙ্গে 60° কোণ করিয়া আছে। ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

13. এক সমতলে অবস্থিত OA, OB, OC, OD রেখার দিকে P, 3P, $\sqrt{3}$P, $\sqrt{3}$P বল ক্রিয়া করে। যদি $\angle AOB=60°$, $\angle BOC=90°$ এবং $\angle COD=120°$ হয়, তাহা হইলে বলসমূহের লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

14. এক সম-ষড়ভুজের কেন্দ্রে একটি আংটি রাখা হইয়াছে। আংটির সহিত ছয়টি সূতা ছয় কৌণিক বিন্দুতে টান করিয়া বাঁধিয়া আংটিটি এই অবস্থানে স্থিরাবস্থায় রাখা হইয়াছে। পরপর চারিটি সূতায় টান 2, 7, 9 এবং 6 পাউণ্ড ভার হইলে অবশিষ্ট সূতা দুইটিতে টান নির্ণয় কর।

15. একটি কণার উপর 10 এবং 6 পাউণ্ড-ভার বল লম্বভাবে ক্রিয়া করে এবং 8 পাউণ্ড-ভার বল তাহাদের অন্তর্ভূ'ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখা বরাবর ক্রিয়া করে; এই সকল বল কণা হইতে বহির্মুখে ক্রিয়াশীল। কণাকে যে বল স্থিরাবস্থায় রাখিবে তাহার মান নির্ণয় কর।

16. 200 গ্রাম ভারের একটি বলকে (i) 60° কোণে ক্রিয়মাণ দুইটি সমান উপাংশে বিশ্লেষণ কর; (ii) 120 কোণে ক্রিয়মাণ দুইটি সমান উপাংশে বিশ্লেষণ কর।

17. 100 পাউণ্ড ভারের একটি বলকে ইহার দুই বিপরীত দিকে 30° এবং 45° কোণ করিয়া দুইটি উপাংশে বিশ্লেষণ কর।

18. একটি কণার উপর দুইটি বল ক্রিয়া করে। একটিকে দ্বিগুণিত এবং অপরটিকে 20 পা. ভার পরিমাণ বর্ধিত করা হইল। যদি লব্ধির দিক্ অপরিবর্তিত থাকে তাহা হইলে দ্বিতীয় বল নির্ণয় কর।

সঙ্কেত :—মনে কর, P এবং Q দুইটি বল ; লব্ধি বল P-এর সঙ্গে α কোণ এবং Q এর সঙ্গে β কোণ করে।

তাহা হইলে $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{2P}{Q+20}$

$Q + 20 = 2Q \quad \therefore \quad Q = 20$ পা. ভার।

19. দুইটি বল P এবং Q-এর লব্ধি $\sqrt{3}Q$ এবং ইহা P-এর সঙ্গে 30° কোণ করে। দেখাও যে হয় P বল Q-এর সমান অথবা Q-এর দ্বিগুণ।

সঙ্কেত : $\dfrac{P}{\sin(\alpha-30^\circ)} = \dfrac{Q}{\sin 30^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}Q}{\sin\alpha}$.

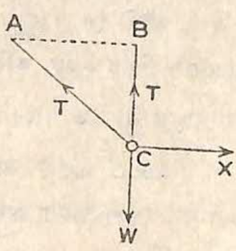
$\sin\alpha = \sqrt{3}\sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \quad \alpha = 60^\circ$ কিংবা 120°

যখন $\alpha = 60^\circ$ তখন $\dfrac{P}{\sin 30^\circ} = \dfrac{Q}{\sin 30^\circ}$, $P = Q$,

যখন $\alpha = 120^\circ$ তখন $\dfrac{P}{\sin 90^\circ} = \dfrac{Q}{\sin 30^\circ}$ $P = 2Q$.

20. যদি একটি বল F কে দুইটি উপাংশ P এবং Q-তে বিশ্লেষিত করা হয় এবং P বল F-এর লম্বাভিমুখী হয় তাহা হইলে Q-এর মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

21. a দূরত্বে অনুভূমিক তলে A এবং B বিন্দুতে l দৈর্ঘ্যের একটি অপ্রসার্য সূতার দুই প্রান্ত বাঁধা হইয়াছে। সূতার ভিতর W ভারের একটি মসৃণ আংটি আছে ; ইহাতে একটি অনুভূমিক বল X প্রয়োগ করিলে যদি আংটি B বিন্দুর উল্লম্বনীচে সাম্যাবস্থায় থাকে প্রমাণ কর যে $X = \dfrac{aW}{l}$ এবং দড়িতে টান $\dfrac{W(a^2+l^2)}{2l^2}$.



সমাধান : অনুভূমিক এবং উল্লম্ব দিকে বিশ্লেষণ করিয়া

$X - T\sin C = 0 \cdots\cdots$ (1)

$T + T\cos C = W \cdots\cdots$ (2)

(2) $T = \dfrac{W}{1+\cos C}$

ধর, BC $= y$. তাহা হইলে

$$T = \frac{W}{1+\frac{y}{l-y}} = \frac{W(l-y)}{l}.$$

(1) হইতে $x = \frac{W(l-y)}{l} \times \frac{a}{l-y} = \frac{W.a}{l}$.

এখন $(l-y)^2 = y^2 + a^2$ or $l^2 - 2ly + y^2 = y^2 + a^2$

$$y = \frac{l^2 - a^2}{2l}. \qquad \therefore \quad T = \frac{W}{l}\left(l - \frac{l^2 - a^2}{2l}\right) = \frac{W}{2l^2}(l^2 + a^2).$$

Examination Paper

(পরীক্ষাপত্র)

1. দুইটি সমান বল P-এর লব্ধি যদি P হয়, বল দুইটির অন্তর্বর্তী কোণ নির্ণয় কর।

2. দুইটি বল যখন সমকোণে ক্রিয়া করে তখন তাহাদের লব্ধি $\sqrt{10}$ পা. ভার, যখন তাহারা 60° কোণে ক্রিয়া করে তখন লব্ধি $\sqrt{13}$ পা. ভার। বল দুইটির মান নির্ণয় কর।

3. দুইটি বল P এবং Q-এর লব্ধি F-এর লম্বাভিমুখে; একই কোণে ক্রিয়মাণ P এবং Q′ বলের লব্ধি Q′-এর লম্বাভিমুখে। দেখাও যে $Q.Q' = P^2$.

4. এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ এবং যথাক্রমে একটি সমবাহু ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান্তরাল দিকে $P-Q$, P এবং $P+Q$ বলের লব্ধি নির্ণয় কর।

5. যদি 10, 20 এবং 30 পা. ভার বল একটি কণাকে সাম্যাবস্থায় রাখে, দেখাও যে তাহারা একই সরলরেখায় ক্রিয়া করে।

6. এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ তিনটি বল P, Q, R সাম্যাবস্থায় আছে; P এবং Q-এর অন্তর্বর্তী কোণ P এবং R-এর অন্তর্বর্তী কোণের দ্বিগুণ। দেখাও যে $R^2 = Q(Q-P)$.

7. দুইটি বল P এবং Q যথাক্রমে একটি মসৃণ নততলের দৈর্ঘ্য ও ভূমির সমান্তরাল দিকে ক্রিয়া করিয়া প্রত্যেকে তলের উপর রক্ষিত W ভারকে একা সাম্যাবস্থায় রাখিতে পারে। দেখাও যে, $\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{W^2}$.

8. ABCD একটি সামান্তরিক। প্রমাণ কর যে AB, CD, AC এবং DB-র দ্বারা সম্পূর্ণভাবে প্রদর্শিত বলের লব্ধির মান, দিক্ এবং অবস্থান 2AB-র দ্বারা প্রদর্শিত হয়।

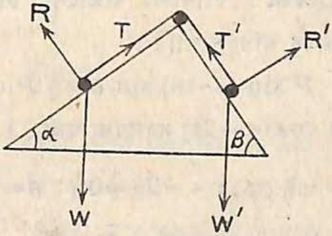
9. একটি সরু সূতার দুই প্রান্তসংলগ্ন দুইটি কণা একই শীর্ষবিশিষ্ট দুইটি মসৃণ তলের উপর রক্ষিত হইয়াছে। সূতাটি শীর্ষস্থ একটি মসৃণ কপির উপর দিয়া গিয়াছে। দেখাও যে দুইটি কণার ভার যথাক্রমে নততল দুইটির দৈর্ঘ্যের অনুপাতে।

সংকেত : মনে কর, নততলদ্বয়ের দৈর্ঘ্য l এবং l, নতি α এবং β, ইহাদের উপর অবস্থিত কণাদ্বয়ের ভার W এবং W ; ধর T দড়ির টান।

প্রথম কণার সাম্যাবস্থার জন্য

লামির সূত্র হইতে $\frac{W}{T}=\frac{\sin 90^\circ}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{1}{\sin\alpha}$ ......(1)

দ্বিতীয় কণার সাম্যাবস্থার জন্য



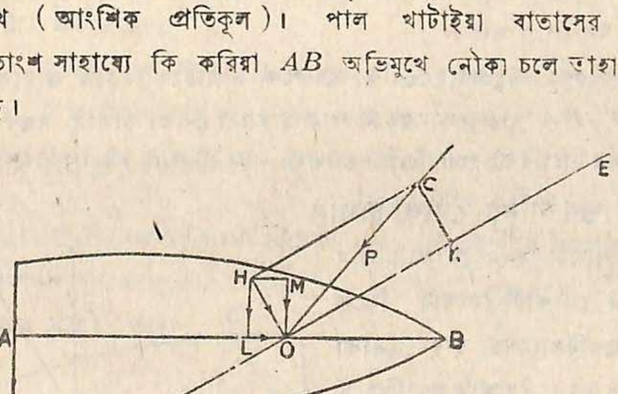
অনুরূপে $\frac{W'}{T}=\frac{1}{\sin\beta}$ ......(2)

(1) ও (2) হইতে $\frac{W}{W}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{l}{l}$

12-9. বলের বিশ্লেষিতাংশের ব্যবহারিক প্রয়োগের দৃষ্টান্ত

(1) আংশিক প্রতিকূল হাওয়ায় পাল সাহায্যে নৌকা চালান :

মনে কর, AB অভিমুখে নৌকা চালাইতে হইবে ; বাতাসের গতি CO অভিমুখে (আংশিক প্রতিকূল)। পাল খাটাইয়া বাতাসের চাপের বিশ্লেষিতাংশ সাহায্যে কি করিয়া AB অভিমুখে নৌকা চলে তাহা দেখান হইতেছে।



মনে কর, DOE পাল (CO এবং OB-র অন্তর্বর্তী কোন দিকে)
$\angle COB=\alpha$, $\angle EOB=\theta$.

বাতাসের চাপ P-কে পাল বরাবর (EO অভিমুখে) এবং পালের লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া যথাক্রমে $P\cos(\alpha-\theta)$ বা KO এবং $P\sin(\alpha-\theta)$ বা HO বল পাওয়া যায়। প্রথম বিশ্লেষিতাংশের কোন ক্রিয়া নাই, কারণ, এদিকে পাল হইতে বিশেষ কিছু বাধা পাওয়া যায় না। $P\sin(\alpha-\theta)$-কে এখন নৌকার দৈর্ঘ্য AB অভিমুখে এবং তাহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিলে ($LO=$) $P\sin(\alpha-\theta)\sin\theta$ এবং ($MO=$) $P\sin(\alpha-\theta)\cos\theta$ পাওয়া যায়। দ্বিতীয় বিশ্লেষিতাংশ (MO) নৌকার উপর জলের পার্শ্ব চাপের দ্বারা প্রতিহত হয়। $P\sin(\alpha-\theta)\sin\theta$ বিশ্লেষিতাংশের ক্রিয়ার ফলে নৌকা AB অভিমুখে চলে।

পাল কিরূপে রাখিলে, বাতাসের চাপের ক্রিয়া সর্বাধিক হইবে তাহাও আমরা নির্ণয় করিতে পারি।

$$P\sin(\alpha-\theta)\sin\theta=\tfrac{1}{2}P\{\cos(\alpha-2\theta)-\cos\alpha\}.$$

যখন $\cos(\alpha-2\theta)$ সর্বাধিক অর্থাৎ 1, তখন এই বল সর্বাধিক।

$$\text{এই ক্ষেত্রে } \alpha-2\theta=0;\quad \theta=\frac{\alpha}{2}.$$

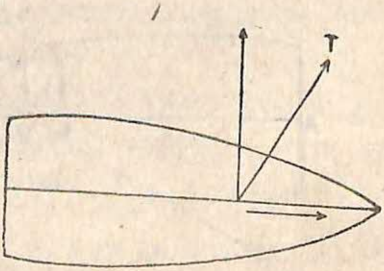
অতএব নৌকার গতির দিক এবং হাওয়ার প্রতীয়মান দিকের মাঝামাঝি করিয়া পাল রাখিলে বাতাসের চাপের ক্রিয়া সর্বাধিক হয়।

লক্ষ্য কর :- যখন (i) $\theta=0$ অর্থাৎ পাল নৌকার দৈর্ঘ্যের দিকে অথবা (ii) যখন $\theta=\alpha$ অর্থাৎ পাল বায়ুপ্রবাহের দিকে তখন নৌকার দৈর্ঘ্য AB অভিমুখে বল লোপ পায়।

বলা বাহুল্য বায়ুপ্রবাহ নৌকা যেদিকে চালাইতে হইবে তাহার সম্পূর্ণ উল্টাদিকে (BA অভিমুখে) হইলে পাল সাহায্যে নৌকা চালান সম্ভব নহে। কারণ, তখন চাপের ক্রিয়মাণ বিশ্লেষিতাংশ $=-P\sin^2\theta$; ইহা BA অভিমুখে।

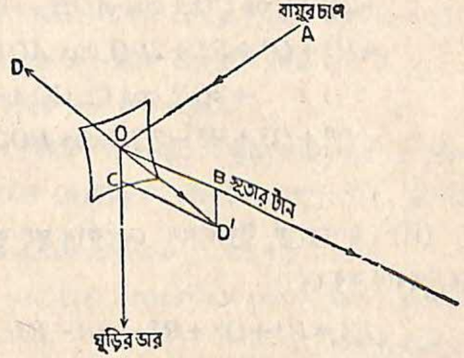
(2) গুণ টানিয়া নৌকা চালান

গুণ টানিয়া যখন নৌকা চালান হয়, তখন নৌকার দৈর্ঘ্যের দিকে টানের বিশ্লেষিতাংশের দ্বারা নৌকা পরিচালিত হয়। দৈর্ঘ্যের লম্বাভিমুখে টানের যে বিশ্লেষিতাংশ তাহা নৌকার উপর জলের পার্শ্বচাপ দ্বারা এবং হালের সাহায্যে প্রশমিত হয়।



(3) ঘুড়ি কি করিয়া উড়ে?

ঘুড়ি যখন উড়ে তখন ইহার উপর তিনটি বল সক্রিয় থাকে, যথা - (i) ঘুড়ির উপর বায়ুর চাপ (ii) সূতার টান এবং iii) ঘুড়ির ভার। মনে কর, AO, OB এবং OC যথাক্রমে এই তিনটি বল প্রদর্শন করে।



বায়ুর চাপের তল বরাবর বিশ্লেষিতাংশের কোন ক্রিয়া হইতে পারে না। মনে কর ঘুড়ির তলের লম্বাভিমুখে চাপের বিশ্লেষিতাংশ OD-র দ্বারা প্রদর্শিত হয়।

ঘুড়ি যখন বাতাসে উড়ে তখন সূতার টান এবং ভারের লব্ধি (OD' রেখার দ্বারা প্রদর্শিত) OD-র সমান ও বিপরীতমুখী।

(বায়ুর চাপ কমিয়া গেলে OD কমিয়া যায় তখন সূতার দ্বারা ঝাঁকি দিয়া চাপ বর্ধিত করা হয়।)

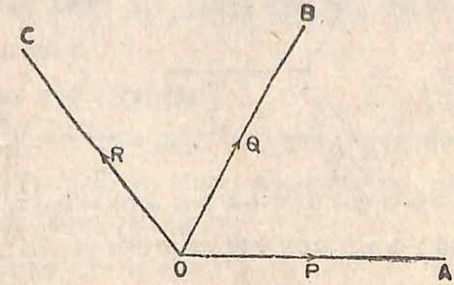
একাধিক বলের লব্ধি এবং বলের বিশ্লেষণ সম্বন্ধীয় জটিলতর প্রশ্ন—লামির সূত্র

12.10. উদাহরণ:

1. (i) তিনটি বল P, Q, R যথাক্রমে OA, OB, OC রেখা বরাবর ক্রিয়া করে; F তাহাদের লব্ধি বলের মান হইলে প্রমাণ কর যে

$$F^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + 2QR \cos BOC + 2RP \cos COA + 2PQ \cos AOB.$$

OA এবং OA-র লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ কর; এই দুইদিকে বিশ্লেষিতাংশ-সমূহের যোগফল যথাক্রমে X এবং Y মনে কর। তাহা-হইলে



$X = P + Q \cos AOB + R \cos COA \text{....(1)}$

$Y = 0 + Q \sin AOB + R \sin COA \text{.....(2)}$

$$F^2=X^2+Y^2=P^2+Q^2\,(\cos^2 AOB+\sin^2 AOB)$$
$$+R^2\,(\cos^2 COA+\sin^2 COA)$$
$$+2PQ\cos AOB+2RP\cos COA$$
$$+2QR\,(\cos COA\cos AOB+\sin COA\sin AOB)$$
$$=P^2+Q^2+R^2+2PQ\cos AOB+2RP\cos COA$$
$$+2QR\cos(\angle COA-\angle AOB)$$
$$=P^2+Q^2+R^2+2QR\cos BOC+2RP\cos COA$$
$$+2PQ\cos AOB.$$

(ii) উপরোক্ত উদাহরণে যে-কোন দুই বলের অন্তর্ভূত কোণ যদি 120° হয়, প্রমাণ কর যে

$$F^2=P^2+Q^2+R^2-QR-RP-PQ]$$

P এবং P-এর লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ কর :

$$X=P+Q\cos 120^\circ+R\cos 240^\circ=P-Q\times\tfrac{1}{2}.-R\times\tfrac{1}{2}.$$

$$Y=0+Q\sin 120^\circ+R\sin 240^\circ=Q\frac{\sqrt3}{2}-R\frac{\sqrt3}{2}.$$

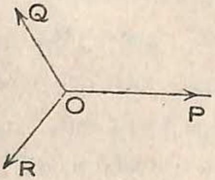
$$F^2=X^2+Y^2=P^2+Q^2+R^2-PQ-PR+2QR(\tfrac14\quad\tfrac34)$$
$$=P^2+Q^2+R^2-QR-RP-PQ.$$

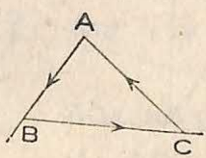
(iii) এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ তিনটি বল P, Q, R যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত BC, CA এবং AB বাহুর সমান্তরাল হইলে প্রমাণ কর যে

$$F^2=P^2+Q^2+R^2-2QR\cos A-2RP\cos B-2PQ\cos C.$$

এখানে $\angle QOP=180^\circ-C$, $\angle ROP=180^\circ+B$

P এবং P-এর লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ কর ; এই দুই দিকে বিশ্লেষিতাংশ সমূহের সমষ্টি X এবং Y ধর। তাহা হইলে





$$X=P+Q\cos QOP+R\cos ROP=P-Q\cos C-R\cos B.\cdots(1)$$
$$Y=0+Q\sin QOP+R\sin ROP=Q\sin C-R\sin B\cdots(2)$$

$\therefore \quad F^2 = X^2 + Y^2 = P^2 + Q^2(\cos^2 C + \sin^2 C)$

$+ R^2(\cos^2 B + \sin^2 B)$

$- 2PQ \cos C - 2PR \cos B + 2QR(\cos C \cos B - \sin C \sin B)$

$= P^2 + Q^2 + R^2 - 2PQ \cos C - 2PR \cos B + 2QR \cos (B+C)$

$= P^2 + Q^2 + R^2 - 2QR \cos A - 2RP \cos B - 2PQ \cos C$

$\because \quad \cos (B + C) = \cos (180° - A) = - \cos A$

*(iv) এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ তিনটি বল ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুত্রয়ের সামান্তরাল এবং বিপরীত কোণের কো-সাইনের অনুপাতে। দেখাও যে তাহাদের লব্ধি $[1 - 8 \cos A \cos B \cos C]^{\frac{1}{2}}$ এর অনুপাতে।

ধর, তিনটি বল P, Q, R তাহা হইলে $P = K \cos A$, $Q = K \cos B$, $R = K \cos C$.

উদাহরণ (iii) এর অনুরূপে কাজ কর।

$F^2 = K^2 [\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 6 \cos A \cos B \cos C]$

ত্রিকোণমিতি হইতে

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C$

$\therefore \quad F^2 = K^2 [1 - 8 \cos A \cos B \cos C]$

$\therefore \quad F = K [1 - 8 \cos A \cos B \cos C]^{\frac{1}{2}}$

$F \propto [1 - 8 \cos A \cos B \cos C]^{\frac{1}{2}}$

(v) তিনটি বল, P, Q, R একটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু A, B, C-র ভিতর দিয়া গিয়াছে। ইহারা বিপরীত বাহুগুলির উপর লম্বভাবে ক্রিয়া করে এবং ঐ কোণগুলির কো-সাইনের অনুপাতে। দেখাও যে তাহাদের লব্ধি F $[1 - 8 \cos A \cos B \cos C]^{\frac{1}{2}}$ এর অনুপাতে।

সংকেত : যেহেতু ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু, অতএব বলত্রয় এক বিন্দুতে ক্রিয়া করে এবং $P = K \cos A$, $Q = K \cos B$, $R = K \cos C$.

[এখন পূর্ব উদাহরণের মত কাজ করিয়া যাও]

2. দুইটি বল P এবং Q পরস্পর α কোণে ক্রিয়া করে ; তাহাদের লব্ধি R ; ঐ দুই দিকে ক্রিয়মাণ অপর দুইটি বল P′ এবং Q′-এর লব্ধি R′ ; প্রমাণ কর যে R এবং R′ এর অন্তবর্তী কোণের কো-সাইন

$\{PP' + QQ' + (PQ' + P'Q) \cos \alpha\}/RR'$

P এর দিকে এবং তাহার লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া

$R \cos\theta = P + Q \cos\alpha$ ....(1) $R \sin\theta = Q \sin\alpha$ ....(2)

$R' \cos\theta' = P' + Q' \cos\alpha$ ...(3) $R' \sin\theta' = Q' \sin\alpha$ ...(4)

(1) ও (3) এবং (2) ও (4) গুণ করিয়া যোগ করিলে

$$RR'(\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta . \sin\theta') = PP' + (PQ' + P'Q)\cos\alpha + QQ'(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$

$$\therefore \quad RR' \cos(\theta' - \theta) = PP' + (PQ' + P'Q)\cos\alpha + QQ'$$

অর্থাৎ $\cos(\theta' - \theta) = \dfrac{PP' + (PQ' + P'Q)\cos\alpha + QQ'}{RR'}$

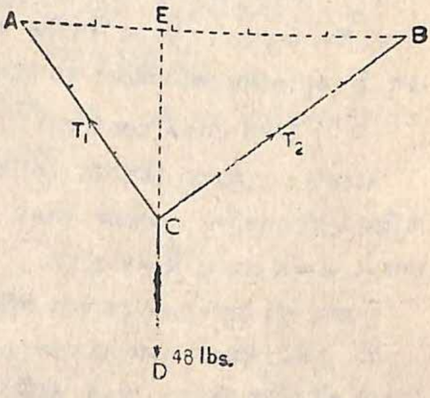
12-11. লামির সূত্রের প্রয়োগ :

পূর্বে লামির সূত্রের প্রমাণ দেওয়া হইয়াছে। এক বিন্দুতে প্রযুক্ত তিনটি বলের সাম্যাবস্থার প্রশ্ন সমাধানে লামির সূত্রের প্রয়োগ অনেক সময় সুবিধাজনক।

উদাহরণ 1. 48 পাউণ্ড ভারের একটি বস্তু 3 ফুট এবং 4 ফুট দীর্ঘ দুইটি দড়ির সাহায্যে ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে, দড়ি দুইটির অপর দুই প্রান্ত অনুভূমিক রেখায় 5 ফুট ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে বাঁধিয়া দেওয়া হইয়াছে। প্রত্যেক দড়িতে কি টান পড়ে ?

মনে কর, AC এবং BC দুইটি দড়ি ; AC = 3 ফুট, BC = 4 ফুট ; AB = 5 ফুট।

ধর, দড়ি দুইটির টান T_1 এবং T_2



যেহেতু $5^2 = 3^2 + 4^2$

অর্থাৎ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$\therefore$ $\angle ACB$ কোণ $= 90°$

C বিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত উল্লম্বরেখা DC, অনুভূমিক রেখা ABকে E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

এখন লামির সূত্র অনুসারে

$$\frac{T_1}{\sin BCD} = \frac{T_2}{\sin ACD} = \frac{48}{\sin ACB}$$

অর্থাৎ $\dfrac{T_1}{\sin(180^\circ - BCE)} = \dfrac{T_2}{\sin(180^\circ - ACE)} = \dfrac{48}{\sin 90^\circ}$

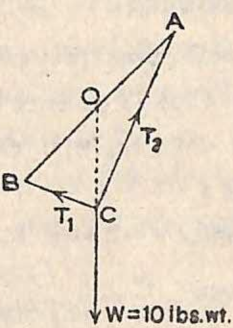
অর্থাৎ $\dfrac{T_1}{\sin(180^\circ - A)} = \dfrac{T}{\sin(180^\circ - B)} = 48$

অর্থাৎ $\dfrac{T_1}{\sin A} = \dfrac{T_2}{\sin B} = 48.$

$\therefore \quad T_1 = 48 \sin A = 48 \times \frac{4}{5} = \frac{192}{5} = 38\frac{2}{5}$ পা. ভার ;

$T_2 = 48 \sin B = 48 \times \frac{3}{5} = \frac{144}{5} = 28\frac{4}{5}$ পা. ভার।

2. 7 ইঞ্চি ও 24 ইঞ্চি দীর্ঘ দুইটি দড়ির সাহায্যে একটি 10 পা. ভরের বস্তু ঝুলান আছে ; তাহাদের অপর দুই প্রান্ত একটি 25 ইঞ্চি দীর্ঘ লাঠির দুই প্রান্তে সংলগ্ন আছে। যদি লাঠিটি এমন ভাবে রাখা হয় যে বস্তুটি লাঠির মধ্যবিন্দুর উল্লম্ব নিম্নে থাকে তাহা হইলে দড়ি দুইটিতে টান নির্ণয় কর।



যেহেতু $25^2 = 24^2 + 7^2$

$\therefore \quad AB^2 = AC^2 + BC^2$

সুতরাং $\angle ACB = 90^\circ$

$\therefore \quad OA = OC = OB$

$\angle OCA = \angle A, \ \angle OCB = \angle B$

ধর, 7 ইঞ্চি দড়িতে টান T_1 এবং
24 ইঞ্চি দড়িতে টান T_2

এখন লামির সূত্র অনুসারে

$$\frac{T_1}{\sin(180^\circ - A)} = \frac{T_2}{\sin(180^\circ - B)} = \frac{10}{\sin 90^\circ}.$$

or $\dfrac{T_1}{\sin A} = \dfrac{T_2}{\sin B} = 10$

$\therefore \quad T_2 = 10 \sin B = 10 \times \frac{24}{25} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$ পা ভার

$T_1 = 10 \sin A = 10 \times \frac{7}{25} = \frac{14}{5} = 2\frac{4}{5}$ পা. ভার

12-12. ক্রেন (Crane) :

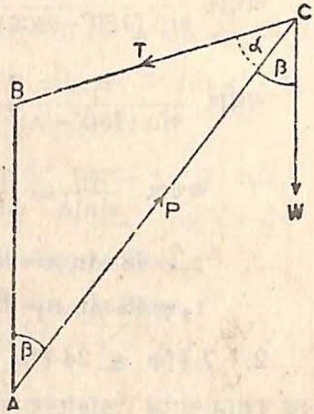
একটি পোস্ট বা স্তম্ভ AB-র শীর্ষে একটি দড়ির (Tie) একপ্রান্ত (B) বাঁধা, অপর প্রান্ত স্তম্ভের A বিন্দু সংলগ্ন ভারহীন দণ্ড (Strut বা Jib) AC-র C প্রান্তে আবদ্ধ। C বিন্দু হইতে একটি ভার W ঝুলান আছে।

C বিন্দু তিনটি বলের প্রয়োগে সাম্যাবস্থায় আছে ;

(1) নিম্নাভিমুখে ঝুলান ভার W,

(2) CB-র দিকে দড়ির টান T,

(3) AC-র দিকে AC দণ্ডের চাপ P



ABC ত্রিভুজের BA, AC এবং CB বাহু যথাক্রমে C বিন্দুতে প্রযুক্ত উক্ত তিনটি বলের সমান্তরাল দিকে। অতএব ABC ত্রিভুজের এই বাহুগুলি যথাক্রমে বল তিনটি নির্দেশ করিতে পারে। সুতরাং

$$\frac{T}{CB}=\frac{P}{AC}=\frac{W}{BA}.$$

অথবা লামির সূত্র সাহায্যে $\dfrac{T}{\sin\beta}=\dfrac{P}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{W}{\sin\alpha}.$

উদাহরণ :

একটি ক্রেনের 'জিব' বা দণ্ড 18 ফুট দীর্ঘ ; 14 ফুট দীর্ঘ বন্ধনী দড়ি থামের গোড়া হইতে 12 ফুট উপরে বাঁধা হইয়াছে। যদি দণ্ড 2 হন্দরের অধিক চাপ বহনে অসমর্থ হয়, তাহা হইলে ক্রেন হইতে কত বোঝা ঝুলিলে দণ্ড ভাঙ্গিয়া যাইবে ?

এখানে P = 2 হন্দর, AC = 18 ফুট, AB = 12 ফুট।

এখন $\dfrac{W}{BA}=\dfrac{P}{AC}$ $\therefore$ $\dfrac{W}{12}=\dfrac{2}{18}$

$W=\frac{2}{18}\times 12=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$ হন্দর।

প্রশ্নমালা 11 (B)

1. P এবং Q বলের লব্ধি R ; Q-কে দ্বিগুণিত করিলে R দ্বিগুণিত হয়। Q বিপরীত মুখে ক্রিয়া করিলেও R দ্বিগুণিত হয়। দেখাও যে

$$P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}.$$

2. 12 ফুট এবং 16 ফুট লম্বা দুইটি দড়ির সাহায্যে 36 পাউণ্ড ভারের একটি বস্তু ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে ; দড়ি দুইটির অপর প্রান্তদ্বয় অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত এবং 20 ফুট ব্যবধানে দুই বিন্দুতে সংযুক্ত আছে। দড়ি দুইটিতে কি টান পড়ে ?

3. 17 কিলোগ্রাম ভারের একটি বস্তু 16 সেমি এবং 30 সেমি. দীর্ঘ দুইটি দড়ির সাহায্যে ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে। দড়ি দুইটির অপর দুইপ্রান্ত অনুভূমিক রেখায় অবস্থিত 34 সেমি. ব্যবধানে দুইটি বিন্দুতে সংযুক্ত আছে। দড়ি দুইটির টান নির্ণয় কর।

4. 100 পা. ভারের একটি বস্তুকে 25 ফুট দীর্ঘ একটি অনুভূমিক দণ্ডের দুই প্রান্ত সংলগ্ন দুইটি দড়িতে বাঁধিয়া ঝুলান হইয়াছে। যদি দড়ি দুইটির দৈর্ঘ্য 7 ফুট এবং 24 ফুট হয়, তাহা হইলে দড়ি দুইটিতে কত টান পড়ে?

5. একটি দড়ি ACB-র দুই প্রান্ত একই অনুভূমিক রেখায় A এবং B দুই বিন্দুতে আবদ্ধ আছে; দড়ির C বিন্দুতে W ভার বাঁধিয়া দেওয়া হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, দড়ির CA অংশে টান

$$\frac{Wb}{4c\Delta}(c^2+a^2-b^2).$$

ABC ত্রিভুজের বাহুগুলি a, b, c এবং ক্ষেত্রফল Δ.

6. 6 ফুট এবং 8 ফুট দীর্ঘ দুইটি দড়িতে বাঁধিয়া একটি 80 পাউণ্ড ভরের বস্তু ঝুলান হইয়াছে; দড়ি দুইটির অপর প্রান্তদ্বয় 10 ফুট দীর্ঘ একটি দণ্ডের দুই প্রান্তে যুক্ত হইয়াছে। যদি দণ্ড এরূপভাবে রাখা হয় যে বস্তুটি দণ্ডের মধ্যবিন্দুর সোজা নীচে থাকে তাহা হইলে দড়ি দুইটিতে কি টান পড়ে?

7. দুইজন লোক 100 কিলোগ্রাম ভারের একটি বস্তু দুইটি দড়ির সাহায্যে বাঁধিয়া বহন করিতেছে। একটি দড়ি উল্লম্বের সহিত 45° এবং অন্যটি 30° কোণ করিয়া আছে। দড়ি দুইটিতে টান নির্ণয় কর।

8. রম্বসাকৃতি একটি সমপাতের একটি কোণ 120°; কেন্দ্রে দুই কর্ণের দিকে P এবং Q বল প্রয়োগ করিয়া ইহার এক বাহু অনুভূমিক ভাবে রক্ষিত হইয়াছে। P যদি বৃহত্তর বল হয় প্রমাণ কর যে $P^2=3Q^2$.

9. একপ্রান্ত আবদ্ধ একটি দড়ির অপর প্রান্তে 10 পাউণ্ড ভরের একটি বস্তু বাঁধিয়া উহাতে অনুভূমিক দিকে F বল প্রয়োগ করা হইল। যদি দড়ি উল্লম্বের সঙ্গে 60° কোণ করিয়া থাকে তাহা হইলে F এবং দড়ির টান নির্ণয় কর।

10. তিনটি সমান দৈর্ঘ্যের ভারহীন দড়ি গ্রন্থি দিয়া একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC করা হইয়াছে এবং A হইতে W ভার ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে। B এবং C-তে অপর দুইটি দড়ি প্রত্যেকে BC-র সঙ্গে 135° কোণ করিয়া ভারসহ ত্রিভুজটিকে যদি এরূপভাবে রাখে যে BC অনুভূমিক থাকে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে BC দড়ির টান $\frac{W}{6}(3-\sqrt{3})$.

সংকেত : প্রথমে A বিন্দুতে ক্রিয়মাণ বল তিনটির সাম্যাবস্থা হইতে দেখাও যে AB এবং AC দড়ির প্রত্যেকটিতে টান $\frac{W}{\sqrt{3}}$; এখন B বিন্দুতে (অথবা C বিন্দুতে) ক্রিয়মাণ বল তিনটির সাম্যাবস্থা আলোচনা কর—লামির সূত্র প্রয়োগ কর।

11. I বিন্দু ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র (Incentre) ; এই বিন্দুতে IA, IB এবং IC অভিমুখে তিনটি বল P, Q এবং R সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে,

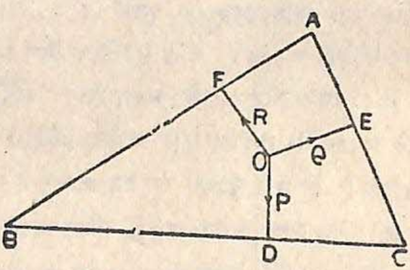
$$\frac{P}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{Q}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{R}{\cos\frac{C}{2}}$$

12. O বিন্দু ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র (circumcentre); OA, OB, OC অভিমুখে তিনটি বল P, Q এবং R সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে,

$$\frac{P}{a^2(b^2+c^2-a^2)}=\frac{Q}{b^2(c^2+a^2-b^2)}=\frac{R}{c^2(a^2+b^2-c^2)}$$

13. ABC ত্রিভুজের তিনবাহুর লম্বভাবে ক্রিয়া করিয়া যদি তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকে, প্রমাণ কর যে বল তিনটি sin A, sin B এবং sin C-র অনুপাতে।

সমাধান :—মনে কর, BC এবং CA বাহুর লম্বাভিমুখে ক্রিয়মাণ P এবং Q বল O বিন্দুতে ছেদ করে। তাহা হইলে, যেহেতু P, Q এবং R সাম্যাবস্থায় আছে, অতএব R বল P এবং Q বলের লব্ধির সমান ও বিপরীতমুখী। এইজন্য R অবশ্যই O বিন্দুগামী হইবে।



এখন O বিন্দুতে ক্রিয়মাণ P, Q এবং R বলের সাম্যাবস্থার জন্য লামির সূত্র অনুসারে

$$\frac{P}{\sin EOF}=\frac{Q}{\sin FOD}=\frac{R}{\sin DOE}$$

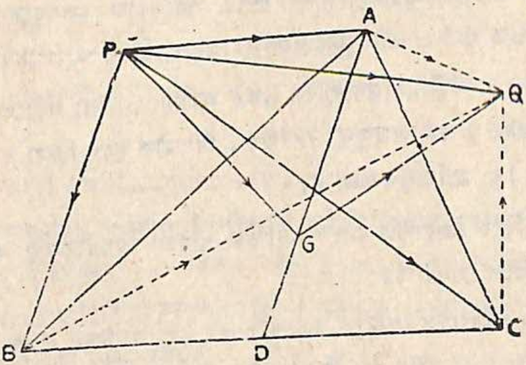
$$\therefore \frac{P}{\sin(180^\circ-A)}=\frac{Q}{\sin(180^\circ-B)}=\frac{R}{\sin(180^\circ-C)}$$

অর্থাৎ $\frac{P}{\sin A}=\frac{Q}{\sin B}=\frac{R}{\sin C}$.

14. তিনটি বল PA, PB এবং PC, P বিন্দু হইতে বহির্মুখীদিকে এবং অপর তিনটি বল AQ, BQ এবং CQ, Q বিন্দুর দিকে ক্রিয়া করে। দেখাও যে এই ছয়টি বলের লব্ধির মান ও দিক্ 3PQ-র দ্বারা প্রদর্শিত হয় এবং লব্ধি ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়।

সমাধান :

PB এবং PC বলের লব্ধি 2PD ; D বিন্দু BC রেখার মধ্যবিন্দু।



2PD এবং PA বলের লব্ধি 3PG ; যেখানে 2DG = AG অর্থাৎ G বিন্দু ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

সুতরাং, PA, PB, PC বলের লব্ধি 3PG

অনুরূপ AQ, BQ, CQ বলের লব্ধি 3GQ

এখন নির্ণেয় লব্ধি 3PG এবং 3GQ-এর লব্ধির সমান

∴ নির্ণেয় লব্ধি 3PQ এবং ইহা ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G এর ভিতর দিয়া যায়।

15. AB এবং CD একটি বৃত্তের দুইটি সমদূরবর্তী সমান্তরাল জ্যা ; বৃত্তের পরিধিতে P বিন্দু A এবং B হইতে সমদূরবর্তী। দেখাও যে PA, PB, PC এবং PD-র দ্বারা প্রদর্শিত বলের লব্ধি ধ্রুবক।

16. ABCDEF একটি সম ষড়ভুজ। 1, $\sqrt{3}$, 3 এর অনুপাতে তিনটি বল AC, AD এবং AE বরাবর ক্রিয়া করে। লব্ধি বলের মান নির্ণয় কর।

17. 2, $\sqrt{3}$, 5, $\sqrt{3}$ এবং 2 পা. ভার বল একটি সমষড়ভুজের একটি কৌণিক বিন্দুতে যথাক্রমে অপর পাঁচ কৌণিক বিন্দুর দিকে ক্রিয়া করে ; ইহাদের লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় কর।

ত্রয়োদশ পরিচ্ছেদ

সমান্তরাল বল
Parallel Forces

13-1. এ যাবৎ আমরা একটি বিন্দুতে প্রযুক্ত বলশ্রেণীর আলোচনা করিয়াছি। এখন একটি বস্তুতে প্রযুক্ত (এবং এক সমতলে অবস্থিত) বল-শ্রেণীর আলোচনা করিব। বস্তুর উপর সমান্তরাল বলসমূহের ক্রিয়া আমরা সর্বদা দেখিতে পাই। এই পরিচ্ছেদে সমান্তরাল বলের আলোচনা করা হইবে।

সংজ্ঞা। দুইটি সমান্তরাল বল একই অভিমুখে ক্রিয়া করিলে তাহাদিগকে **সদৃশ** (like) বা **সমমুখ** বলা হয় ; বিপরীত মুখে ক্রিয়া করিলে **অসদৃশ** (unlike) বা **প্রতিমুখ** বলা হয়।

কোন দিকে ক্রিয়াশীল বলকে ধনাত্মক ধরিয়া বিপরীতমুখী অসদৃশ বলকে ঋণাত্মক ধরিলে সুবিধা হইবে।

যদি ঊর্ধ্বমুখে ক্রিয়াশীল একটি বল 20 পাউণ্ড হয় এবং অধঃদিকে প্রযুক্ত অপর একটি বল 30 পাউণ্ড হয়, তাহা হইলে ঊর্ধ্বদিকের বলকে ধনাত্মক ধরিলে অধোমুখী বল ঋণাত্মক। একটি +20 পাউণ্ড, অপরটি −30 পাউণ্ড।

13-2. দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয়

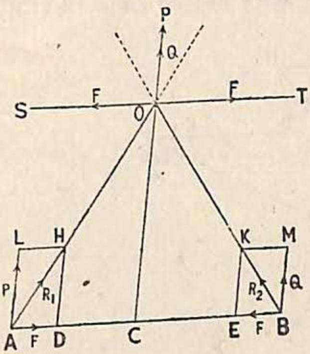
একটি বস্তুর দুইটি বিন্দু A এবং B-তে দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P এবং Q ক্রিয়া করিতেছে। AL এবং BM রেখা দ্বারা ইহাদিগকে নির্দেশ করা হইল। A এবং B বিন্দুতে AB এবং BA-র দিকে দুইটি সমান বল F প্রয়োগ কর। ইহারা বিপরীত মুখে একই সরল রেখাতে ক্রিয়া করিতেছে বলিয়া বস্তুর উপর ইহাদের কোন ক্রিয়া নাই। এই দুইটি বল AD এবং BE (AD = BE) দ্বারা নির্দেশ করা হইল।

ADHL এবং BEKM সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর। এখন AH রেখা A বিন্দুতে ক্রিয়াশীল P এবং F বলের লব্ধি R_1-এর নির্দেশক এবং BK রেখা B বিন্দুতে ক্রিয়াশীল Q এবং F বল দুইটির লব্ধি R_2-এর নির্দেশক।

অতএব R_1 এবং R_2-এর লব্ধি নির্ণয় করিলেই হইবে।

AH এবং BK রেখা বর্ধিত করা হইল এবং ইহারা O বিন্দুতে ছেদ করিল। AL অথবা BM-এর সমান্তরাল OC রেখা অঙ্কিত হইল এবং ইহা AB-কে C বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন, R_1 বলের প্রয়োগবিন্দু ইহার ক্রিয়ারেখার উপরিস্থিত O বিন্দুতে অপসারিত হইল।



অনুরূপে, R_2 বলের প্রয়োগবিন্দুকে O বিন্দুতে অপসারিত করা হইল।

O বিন্দুতে R_1 বলকে AL এবং AB-র সমান্তরাল দিকে বিশ্লেষণ করিলে বর্ধিত CO রেখার দিকে P এবং OT রেখার দিকে F উপাংশ পাই।

অনুরূপে, R_2কে BM এবং BA-র সমান্তরাল দিকে বিশ্লেষণ করিলে বর্ধিত CO রেখার দিকে Q এবং OS রেখার দিকে F উপাংশ পাই।

O বিন্দুতে F বলদ্বয় সমান ও বিপরীতমুখী বলিয়া ইহাদের কোন ক্রিয়া নাই অতএব নির্ণেয় **লব্ধি** P+Q হইল। ইহা P এবং Q-এর সমান্তরাল।

লব্ধির ক্রিয়া-রেখা পাইতে হইলে C বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে হইবে।

সদৃশ ত্রিভুজ ADH এবং ACO হইতে

$$\frac{AD}{DH}=\frac{AC}{CO}, \quad \therefore \quad \frac{F}{P}=\frac{AC}{CO} \text{ অথবা } P.AC=F.CO \cdots (1)$$

আবার, সদৃশ ত্রিভুজ BEK এবং BCO হইতে

$$\frac{BE}{EK}=\frac{BC}{CO}, \quad \therefore \quad \frac{F}{Q}=\frac{BC}{CO} \text{ অথবা, } Q\,BC=F.CO \cdots (2)$$

(1) এবং (2) সম্বন্ধ হইতে

$P.AC=Q.BC$

$$\therefore \quad \frac{AC}{BC}=\frac{Q}{P}$$

ইহা হইতে C বিন্দুর অবস্থান পাওয়া গেল।

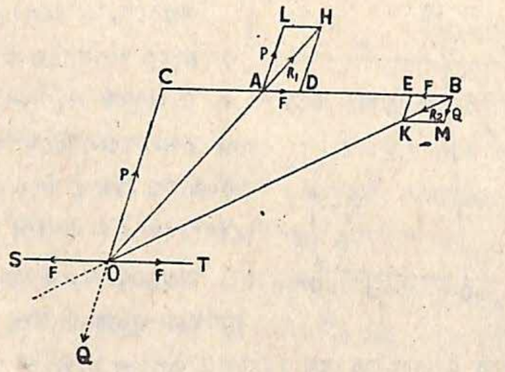
লক্ষ্য কর, (i) লব্ধি বৃহত্তর বলের অধিকতর নিকটবর্তী।

(ii) C বিন্দু AB রেখাকে P এবং Q বলের ব্যস্ত অনুপাতে বিভক্ত করে।

13-3. দুইটি অসদৃশ (অসমান মানের) সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয়।

A এবং B বিন্দুতে F এবং Q ($P>Q$) দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল ক্রিয়া করিতেছে, AL এবং BM রেখা দ্বারা ইহাদিগকে নির্দেশ করা হইল।

AB যুক্ত কর ; A ও B বিন্দুতে AB এবং BA-র দিকে দুইটি বিপরীতমুখী সমান বল F প্রয়োগ করা হইল। বস্তুর উপর ইহাদের কোন ক্রিয়া নাই।



এই দুইটি বল AD এবং BE দ্বারা নির্দেশ করা হইল। ADHL এবং BEKM সামান্তরিক সম্পূর্ণ করা হইল। এখন AH সরল রেখা A বিন্দুতে প্রযুক্ত P এবং F বলের লব্ধির (R_1) নির্দেশক হইল এবং BK সরল রেখা B বিন্দুতে প্রযুক্ত Q এবং F বলের লব্ধির (R_2) নির্দেশক।

সুতরাং R_1 এবং R_2-এর লব্ধি নির্ণেয় লব্ধি হইবে।

HA এবং BK রেখা বর্ধিত করা হইল এবং ইহারা যেন O বিন্দুতে ছেদ করিল। R_1 বলের প্রয়োগবিন্দু ইহার ক্রিয়ারেখার উপরিস্থিত O বিন্দুতে অপসারিত হইল ; এইরূপে B বিন্দুতে প্রযুক্ত R_2 বলের প্রয়োগবিন্দুকে O বিন্দুতে সরাইয়া নিলাম। AL অথবা BM-এর সমান্তরাল OC রেখা অঙ্কিত হইল ; ইহা বর্ধিত BAকে C বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন O বিন্দুতে R_1 বলকে AL এবং AB রেখার সমান্তরাল দিকে বিশ্লেষণ করিলে OC রেখার দিকে P এবং OT রেখার দিকে F উপাংশ পাই।

অনুরূপে, R_2-কে বিশ্লেষণ করিয়া বর্ধিত CO রেখার দিকে Q এবং OS রেখার দিকে F উপাংশ পাই।

O বিন্দুতে F বলদ্বয় সমান ও বিপরীতমুখী বলিয়া ইহাদের কোন ক্রিয়া নাই। অতএব নির্ণেয় লব্ধি P—Q হইল। ইহা P এবং Q-এর সমান্তরাল।

লব্ধির ক্রিয়া রেখা পাইতে হইলে C বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে হইবে।

সদৃশ ত্রিভুজ ADH এবং ACO হইতে

$\frac{AD}{DH}=\frac{AC}{OC}$ $\therefore$ $\frac{F}{P}=\frac{AC}{OC}$ অথবা, $P.AC=F.OC$ ···(1)

আবার, সদৃশ ত্রিভুজ BEK এবং BCO হইতে

$\frac{BE}{EK}=\frac{BC}{OC}$ $\therefore$ $\frac{F}{Q}=\frac{BC}{OC}$ অথবা, $Q.BC=F.OC$ ···(2)

(1) এবং (2) সম্বন্ধ হইতে

$P.AC=Q.BC$

$\therefore$ $\frac{AC}{BC}=\frac{Q}{P}$

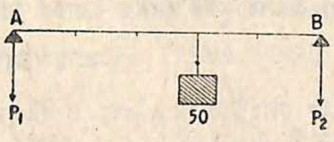
ইহা হইতে C বিন্দুর অবস্থান পাইলাম।

লক্ষ্য কর : (i) লব্ধি বৃহত্তর বল P-এর অধিকতর নিকটবর্তী এবং Q-এর বিপরীত পার্শ্বে।

(ii) C বিন্দু BA রেখাকে P এবং Q বলের ব্যস্ত অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।

13-4. উদাহরণ :

(1) 5 ফুট দীর্ঘ একটি ভারহীন দণ্ডের একপ্রান্ত হইতে 3 ফুট দূরে 50 পাউণ্ড-ভারের একটি বোঝা ঝুলাইয়া লাঠির দুই প্রান্তে দুইজন লোক কাঁধে লইয়া বহন করিতেছে। কাহার কাঁধে কত চাপ পড়িবে?



[এখানে লাঠির ভার গ্রহণ করা হইল না।]

মনে কর, যাহার নিকট হইতে 3 ফুট দূরে তাহার উপর P_1 চাপ এবং অপর ব্যক্তির উপর P_2 চাপ পড়ে। তাহা হইলে

$P_1+P_2=50$ ....(1)

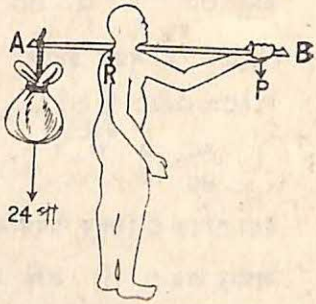
এবং $P_1\times 3=P_2\times 2$ ....(2)

এই দুই সমীকরণ সমাধান করিয়া $P_1=20$ পাউণ্ড-ভার

$P_2=30$ পাউণ্ড-ভার।

(2) একজন লোক কাঁধের উপর 3 ফুট লম্বা একটি লাঠির প্রান্তে 24 পাউণ্ড-ভার বহন করিতেছে; লাঠির অপর প্রান্ত সে হাত দিয়া চাপিয়া ধরিয়াছে। (i) বোঝাটি কাঁধের পিছনে 1 ফুট দূরে থাকিলে কাঁধে কত চাপ পড়ে?

(ii) বোঝাটি কাঁধের পিছনে 2 ফুট দূরে থাকিলে কাঁধে কত চাপ পড়ে ?



(i) মনে কর, লোকটি হাত দিয়া নীচের দিকে P পরিমাণ চাপ প্রয়োগ করে এবং তাহার কাঁধের উপর R চাপ পড়ে।

তাহা হইলে $P+24=R$ ....(1)

$P\times2=24\times1$ ....(2)

∴ $P=12$ পাউণ্ড-ভার এবং

$R=36$ পাউণ্ড-ভার।

(ii) মনে কর, হাতের চাপ P_1 এবং কাঁধের উপর চাপ R_1

$P_1+24=R_1$ .... (1)

$P_1\times1=24\times2$ ....(2)

$P_1=48$ পা. ভার এবং $R_1=72$ পা. ভার।

লক্ষ্য কর : দ্বিতীয় ক্ষেত্রে হাত দিয়া নীচের দিকে প্রথম ক্ষেত্রের 4 গুণ বল প্রয়োগ করা হইতেছে এবং কাঁধের উপর দ্বিগুণ চাপ পড়িতেছে। হাত এবং কাঁধের দূরত্ব অর্ধেক করাতে কাঁধের উপর চাপ দ্বিগুণ পড়িল।

প্রশ্নমালা 12

নিম্নের চারিটি প্রশ্নে A এবং B বিন্দুদ্বয় সমান্তরাল বল P এবং Q-এর প্রয়োগ বিন্দু ; লব্ধি (R) AB সরলরেখাকে C বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

1. (সদৃশ সমান্তরাল বল হইলে) লব্ধির মান ও অবস্থান নির্ণয় কর :—

(i) $P=8$, $Q=2$, $AB=10$ ফু. ;

(ii) $P=10$, $Q=40$, $AB=20$ সে মি.

2. (অসদৃশ সমান্তরাল বল হইলে) লব্ধির মান ও অবস্থান নির্ণয় কর :—

(i) $P=27$, $Q=7$, $AB=20$ ফুট ;

(ii) $P=30$, $Q=10$, $AB=12$ সে. মি. ;

(iii) $P=2$, $Q=10$, $AB=12$ সে. মি.

3. বল দুইটি সদৃশ সমান্তরাল এবং

(i) $P=10$, $R=16$, $AC=3$ ফুট ; Q এবং AB নির্ণয় কর।

(ii) $Q=20$, $AC=12$ সে. মি., $AB=18$ সে. মি. ; P এবং R নির্ণয় কর।

(iii) $P=12$, $AC=9$ সে. মি., $CB=6$ সে. মি., Q এবং R নির্ণয় কর।

4. (*a*). বল দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল এবং

(i) P=12, R=9, AC=−4 ইঞ্চি ; Q এবং AB নির্ণয় কর।

(ii) Q=5, AC=−10 সে. মি., AB=14 সে. মি. ; P এবং R নির্ণয় কর।

(iii) P=6, AC=−9 সে. মি., AB=9 সে. মি. ; Q এবং R নির্ণয় কর।

(*b*). 16 ইঞ্চি ব্যবধানে অবস্থিত A এবং B বিন্দুতে ক্রিয়মাণ 20 পা. এবং 10 পা. ভারের দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধির মান ও ক্রিয়া-রেখা নির্ণয় কর।

(*c*). 16 ইঞ্চি ব্যবধানে অবস্থিত A এবং B বিন্দুতে ক্রিয়মাণ 20 এবং 10 পাউণ্ড-ভারের দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধির মান ও ক্রিয়ারেখা নির্ণয় কর।

5. 2 ফুট ব্যবধানে স্থিত দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি 20 পাউণ্ড-ভার বল ; ইহাদের একটির প্রয়োগ বিন্দু লব্ধির প্রয়োগ বিন্দু হইতে 9 ইঞ্চি দূরে হইলে, বল দুইটি নির্ণয় কর।

6. 90 গ্রাম ভার বলের সমান এবং পরস্পর হইতে 30 সে. মি. ব্যবধানে অবস্থিত দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল নির্ণয় কর যেন ইহাদের বৃহত্তরটি প্রদত্ত বল হইতে 10 সে. মি. দূরে হয়।

7. দুইজন লোক একটি সরল সমদণ্ড বহন করিতেছে। ইহার ভার 160 পাউণ্ড এবং ইহা 16 ফুট দীর্ঘ। যদি একজন লোক একপ্রান্ত হইতে 2 ফুট দূরে এবং অপর লোক অন্যপ্রান্ত হইতে 3 ফুট দূরে থাকিয়া দণ্ডটি বহন করে তাহা হইলে প্রত্যেকে কত ভার বহন করে ?

[সমদণ্ডের ভার ইহার মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়া করে]

8. দুইজন লোক 5 মিটার দীর্ঘ একটি ভারহীন দণ্ডে 50 কিলোগ্রাম ভারের একটি বোঝা ঝুলাইয়া দুই প্রান্তে বহন করিতেছে। একজন লোক যে বিন্দু হইতে বোঝা ঝুলান হইয়াছে সে বিন্দু হইতে 3 মিটার দূরে। প্রত্যেকে কত ভার বহন করিতেছে ?

9. 8 ফুট দীর্ঘ একটি সরল ভারহীন দণ্ডের দুই প্রান্ত দুইটি অনুভূমিক কীলক P এবং Q-এর উপর অবস্থিত ; দণ্ডের R বিন্দুতে একটি ভারী বস্তু বাঁধা আছে। যদি PR=3RQ হয়, এবং P অপেক্ষা Q-তে 325 পাউণ্ড বেশি ভার পড়ে তাহা হইলে বস্তুটির ভার নির্ণয় কর।

10. 6 ফুট দীর্ঘ এবং 30 পাউণ্ড ভার-বিশিষ্ট একটি সমদণ্ড একটি টেবিলের উপর রক্ষিত হইয়াছে। ইহার এক প্রান্ত টেবিলের 1 ফুট বাহিরে আছে। সাম্যাবস্থা নষ্ট না হয় এরূপভাবে সর্বাধিক কত ভার এই প্রান্ত হইতে ঝুলান যায় ?

11. একজন লোক একটি লাঠির প্রান্তে একটি বোঝা ঝুলাইয়া ইহা কাঁধের উপর বহন করিতেছে। সে লাঠির অন্য প্রান্ত হাত দিয়া নীচের দিকে চাপিয়া ধরিয়াছে। কাঁধ ও হাতের মধ্যে দূরত্ব পরিবর্তন করিলে কি ভাবে কাঁধের উপর চাপের পরিবর্তন হয় ?

12. একজন লোক 12 ফুট দীর্ঘ একটি ভারহীন দণ্ডের দুই প্রান্তে দুইটি বস্তু ঝুলাইয়া কাঁধের উপর বহন করিতেছে। যদি তাহার কাঁধের উপর 154 পাউণ্ড-ভার পড়ে এবং তাহার কাঁধ হইতে এক প্রান্ত 4 ফুট দূরে হয় তাহা হইলে বস্তু দুইটির ভার নির্ণয় কর।

13. দুইজন লোক একটি 6 ফুট দীর্ঘ ভারহীন তক্তার উপর 300 পাউণ্ড ভারের একটি প্রস্তর রাখিয়া বহন করিতেছে। ইহাদের মধ্যে একজন লোক 170 পাউণ্ড ভার বহনে সমর্থ। পাথরটি কোন্ অবস্থানে রাখিলে তাহার উপর ঠিক এই পরিমাণ ভার পড়িবে।

14. দুই ফুট দীর্ঘ একটি ভারহীন দণ্ড 3 ইঞ্চি ব্যবধানে দুইটি কীলকের ভিতর আছে। একটি কীলক দণ্ডের একপ্রান্তে এবং অপর প্রান্তে 5 পাউণ্ড ভার ঝুলান আছে। কীলক দুইটির উপর চাপ নির্ণয় কর।

15. দুই ব্যক্তি একটি ভারহীন দণ্ড হইতে 50 কিলোগ্রাম ভারের একটি বোঝা ঝুলাইয়া বহন করিতেছে। দণ্ডটি 2 মিটার দীর্ঘ এবং উহার দুই প্রান্ত এই দুই ব্যক্তির স্কন্ধে স্থাপিত। যে বিন্দু হইতে বোঝাটি ঝুলান হইয়াছে উহা একব্যক্তি হইতে যতদূরে অন্যজন হইতে তাহা অপেক্ষা 10 সেন্টিমিটার কম দূরে হইলে প্রত্যেকের স্কন্ধে কত চাপ পড়ে ?

16. একটি ভারহীন দণ্ডের একপ্রান্ত হইতে যথাক্রমে 2, 8 এবং 6 ফুট দূরে অবস্থিত তিনটি বিন্দুতে তিনটি সমান্তরাল বল P, Q, R ক্রিয়া করে। যদি দণ্ডটি সাম্যাবস্থায় থাকে, দেখাও যে $P : Q : R = 1 : 2 : 3$

সঙ্কেত : সাম্যাবস্থার জন্য P এবং Q বলের লব্ধি তৃতীয় বল R-এর সমান ও বিপরীত।

$P(6-2)=Q(8-6)$ অর্থাৎ $4P=2Q,\ Q=2P$

$$\therefore\ \frac{P}{1}=\frac{Q}{2}=\frac{P+Q}{3}=\frac{R}{3}$$

17. যদি দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল P এবং Qকে (P>Q) সমপরিমাণ বর্ধিত করা হয়, দেখাও যে লব্ধির ক্রিয়া-রেখা P হইতে অধিকতর দূরে সরিয়া যাইবে।

ধর, P এবং Q অসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় A এবং B বিন্দুতে প্রযুক্ত হইয়াছে। Q অপেক্ষা P বড় হইলে লব্ধির ক্রিয়া রেখা বর্ধিত BAকে P বলের নিকটতর C বিন্দুতে ছেদ করে এবং

$$P\,AC = Q.BC = Q(AB + AC)$$

$$\therefore\ (P-Q)AC = Q.AB \text{ অথবা } AC = \frac{Q}{P-Q}AB \cdots (1)$$

উভয় বল যদি F পরিমাণ বৃদ্ধি করা হয়, এবং তাহাদের ক্রিয়ারেখা বর্ধিত BAকে C′ বিন্দুতে ছেদ করে তাহা হইলে,

$$\text{অনুরূপে } AC' = \frac{Q+F}{(P+F)-(Q+F)}AB = \frac{Q+F}{P-Q}AB \cdots (2)$$

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া

$$AC' - AC = \frac{F}{P-Q}.\ AB \text{ (একটি ধনাত্মক রাশি)।}$$

অতএব AC অপেক্ষা AC′ বৃহত্তর।

18. $2a$ দৈর্ঘ্যের এবং w ভারের একটি সমভার তক্তা b ব্যবধানে দুইটি উল্লম্ব কীলকের উপর অনুভূমিকভাবে রক্ষিত হইয়াছে। দুই প্রান্তে যথাক্রমে বৃহত্তম ভার w_1 এবং w_2 রাখা যায়। দেখাও যে

$$\frac{w_1}{w+w_1} + \frac{w_2}{w+w_2} = \frac{b}{a}.$$

সঙ্কেত: মনে কর, মধ্যবিন্দু হইতে কীলকদ্বয়ের দূরত্ব x এবং y; তাহা হইলে $x+y=b$.

$$wx = w_1(a-x),\ x = \frac{w_1 a}{w+w_1} \quad \text{অনুরূপে } y = \frac{w_2 a}{w+w_2}$$

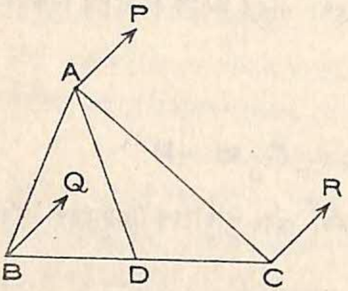
$$\text{এখন } b = \frac{w_1 a}{w+w_1} + \frac{w_2 a}{w+w_2} \quad \therefore \quad \frac{w_1}{w+w_1} + \frac{w_2}{w+w_2} = \frac{b}{a}.$$

19 তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q, R একটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুতে ক্রিয়া করে। দেখাও যে বলত্রয়ের যে কোন দিকের জন্য যদি

P=Q=R হয় তাহা হইলে তাহাদের লব্ধি ভরকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়।

20. তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q, R একটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যদি তাহাদের লব্ধির ক্রিয়া রেখা ত্রিভুজের ভর-কেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায় তাহা হইলে P=Q=R।

B এবং C বিন্দুতে ক্রিয়মাণ Q এবং R সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি Q+R যদি D বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়, তাহা হইলে,



$$\frac{BD}{DC}=\frac{R}{Q} \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এখন D বিন্দুতে ক্রিয়মাণ Q+R এবং A বিন্দুতে ক্রিয়মাণ P বলের লব্ধি AD-র উপরে একটি বিন্দু G-এর ভিতর দিয়া যাইবে। কিন্তু প্রদত্ত শর্ত অনুসারে এই বিন্দুটি ত্রিভুজের ভর-কেন্দ্র। সুতরাং AD একটি মধ্যমা।

$$\therefore \quad BD=DC \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots (2)$$

তাহা হইলে (1) হইতে R=Q

অনুরূপে Q=P $\qquad \therefore \quad$ P=Q=R.

*21. তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল P, Q, R একটি ত্রিভুজ ABCর কৌণিক বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যদি তাহাদের ক্রিয়া রেখা

(i) ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়, দেখাও যে

$$\frac{P}{\sin A}=\frac{Q}{\sin B}=\frac{R}{\sin C}$$

(ii) ত্রিভুজের লম্ববিন্দুর ভিতর দিয়া যায়, দেখাও যে

$$\frac{P}{\tan A}=\frac{Q}{\tan B}=\frac{R}{\tan C}.$$

(iii) ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়, দেখাও যে

$$\frac{P}{\sin 2A}=\frac{Q}{\sin 2B}=\frac{R}{\sin 2C}.$$

চতুর্দশ পরিচ্ছেদ

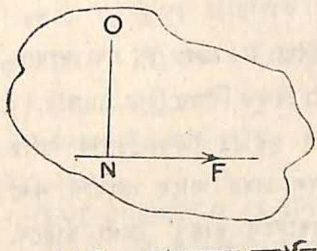
ভ্রামক
Moment

14-1. মনে কর, একটি টিনের পাত একটি মসৃণ টেবিলের উপর রাখা হইয়াছে এবং পাতের একটি বিন্দু টেবিলের সঙ্গে আটকান আছে যেন পাতটি এই স্থিরবিন্দুর চারিদিকে ঘুরিতে পারে। পাতের উপর যদি একটি বল প্রয়োগ করা হয় এবং বলের ক্রিয়ারেখা পাতের উক্ত স্থিরবিন্দুর ভিতর দিয়া না যায় তাহা হইলে বলের ক্রিয়ার ফলে পাতটি ঘুরিতে চাহিবে।

একটি দরজার পাল্লায় লম্বভাবে কোন একটি বল প্রয়োগ করিলে পাল্লাটি কব্জার চারিদিকে ঘুরিতে চাহিবে। কব্জা হইতে যতদূরে বল প্রয়োগ করা যায় পাল্লাটি তত সহজে ঘুরে।

একটি বল যদি কোন বস্তুকে ঐ বস্তুস্থ কোন স্থির বিন্দুর (বা, স্থির অক্ষের) চারিদিকে ঘুরাইতে চায় তাহা হইলে ঘূর্ণন-প্রবণতাকে প্রযুক্ত বলের ভ্রামক বলা হয়।

14-2. সংজ্ঞা। কোন বিন্দু হইতে একটি বলের ক্রিয়া-রেখার উপর লম্ব অঙ্কিত হইলে বল ও লম্বের গুণফলকে বিন্দুটির চারিদিকে বলের ঘূর্ণ-ফল বা ভ্রামক (Moment) বলে।

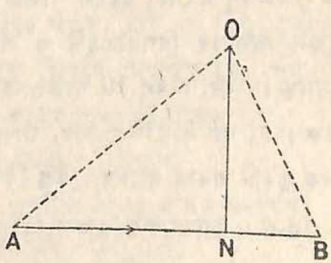


চিত্রে O বিন্দু হইতে F বলের ক্রিয়ারেখার উপর ON লম্ব অঙ্কিত হইয়াছে। প্রদত্ত O বিন্দুর চারিদিকে F বলের ভ্রামক $= F \times ON$.

দেখা যাইতেছে, ভ্রামক শূন্য হইতে হইলে বল শূন্য হইবে অথবা বলের ক্রিয়ারেখা প্রদত্ত বিন্দুর ভিতর দিয়া যাইবে।

14-3. ভ্রামকের জ্যামিতিক প্রকাশ (Geometrical Representation of Moment)

মনে কর, AB সরলরেখা F বলের মান, দিক্ ও ক্রিয়ারেখা প্রদর্শন করে। এক প্রদত্ত বিন্দু O হইতে AB রেখার উপর ON লম্ব অঙ্কিত হইয়াছে।



OA এবং OB যুক্ত কর।

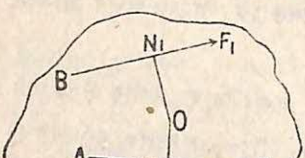
সংজ্ঞা অনুসারে, O বিন্দুর চারিদিকে F বলের ভ্রামক $= F \times ON$

$$= AB \times ON$$
$$= 2\triangle OAB$$

অতএব, বল-প্রদর্শক রেখাকে ভূমি এবং যে বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লওয়া হয় সেই বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু লইয়া অঙ্কিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ, প্রদত্ত বিন্দুর চারিদিকে বলের ভ্রামক প্রকাশ করে।

14-4. বল একটি বস্তুকে কোন বিন্দুর চারিদিকে ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘুরে সে দিকে অথবা তাহার বিপরীত দিকে ঘুরাইতে পারে। ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘুরে ঘূর্ণন তাহার বিপরীত দিকে হইতে চাহিলে ভ্রামক ধনাত্মক (+) এবং ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘুরে ঘূর্ণন সেদিকে হইতে চাহিলে ভ্রামক ঋণাত্মক (−) ধরা হয়।

14-5. ভ্রামকের পরিমাপ অর্থাৎ ঘূর্ণফল যে, বল এবং প্রদত্ত বিন্দু হইতে বলের উপর লম্বের গুণফল দিয়া প্রকাশ করা যাইতে পারে তাহার একটি পরীক্ষা দেখ।



মনে কর, একটি মসৃণ টেবিলের উপর একটি পাত রাখা হইয়াছে এবং ইহার একটি বিন্দু O পেরেক দিয়া টেবিলের সঙ্গে আটকাইয়া রাখা হইয়াছে।

পাতের দুইটি বিন্দু A এবং B-তে সূতা বাঁধিয়া F এবং F_1 বল প্রয়োগ করা হইয়াছে (যেন কোন বলের ক্রিয়ারেখা O বিন্দুর ভিতর দিয়া না যায়)। সূতা দুইটি তলের উপর রাখা হইয়াছে এবং বল দুইটির ক্রিয়া-রেখার উপর ON, ON_1 লম্ব অঙ্কিত হইয়াছে। F এবং F_1 বল এমন ভাবে প্রয়োগ করা হইয়াছে যেন ইহারা তলটিকে বিপরীত দিকে ঘুরাইতে চায়। দেখা যাইবে, $F \times ON = F_1 \times ON_1$ হইলে পাতটি স্থির থাকিবে। তাহা হইলে একটি বলের ঘূর্ণফল অপরের বিপরীতমুখী ও সমান ঘূর্ণফলের দ্বারা সাম্যাবস্থায় নীত হইয়াছে। ধর, F বল 10 পাউণ্ড-ভার, ON লম্ব 2 ফুট, ভ্রামক $= 10 \times 2 = 20$ একক ; F_1 বল 5 পাউণ্ড-ভার, ON_1 লম্ব 4 ফুট, ভ্রামক $= 5 \times 4 = 20$ একক। ভ্রামক দুইটি সমান মানের, কিন্তু বিপরীতমুখী বলিয়া পাতটি স্থির থাকিবে।

14-6. ভ্রামকের একক (Unit of Moment)

ভ্রামক = বলের পরিমাণ × দূরত্ব। এফ্. পি. এস্. পদ্ধতিতে বলের একক পাউণ্ড-ভার এবং দূরত্বের একক ফুট ; ভ্রামকের একক 'ফুট-পাউণ্ড'।

সি. জি. এস্. পদ্ধতিতে বলের একক গ্রাম-ভার এবং দূরত্বের একক সেন্টিমিটার ; ভ্রামকের একক 'গ্রাম-সেন্টিমিটার'।

14-7. ভ্রামকসমূহের বীজগাণিতিক যোগফল : কোন বিন্দুর চারিদিকে বলশ্রেণীর ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল বলিতে প্রত্যেক ভ্রামকের পূর্বে তাহার নির্দিষ্ট চিহ্ন দিয়া ভ্রামকসমূহের যোগফল বুঝায়।

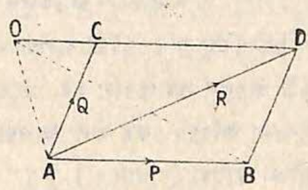
14-8. একটি প্রদত্ত বিন্দুর চারিদিকে দুইটি বলের ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল ঐ দুই বলের লব্ধির ভ্রামকের সমান।

(ক) দুইটি পরস্পরচ্ছেদী বল (Two intersecting forces)

P এবং Q বল পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ; O ইহাদের সমতলে অবস্থিত একটি বিন্দু।

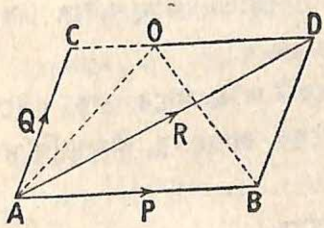
O বিন্দুর ভিতর দিয়া P বলের সমান্তরাল একটি রেখা অঙ্কিত কর ; ইহা যেন Q বলকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন AC রেখার দ্বারা Q বলকে নির্দেশ কর। P বলকে নির্দেশ করিবার জন্য এই একই স্কেলে P বলের ক্রিয়া-রেখা হইতে AB অংশ লও। ABDC সামান্তরিক সম্পূর্ণ কর। তাহা হইলে AD রেখা P এবং Q বলের লব্ধি R প্রদর্শন করে। OA এবং OB যুক্ত কর।

এখন, O বিন্দুর চারিদিকে P বলের ভ্রামক + O বিন্দুর চারিদিকে Q বলের ভ্রামক $= 2\triangle OAB + 2\triangle OAC$



$= 2\triangle DAB + 2\triangle OAC$
$= 2\triangle CAD + 2\triangle OAC$
$= 2\triangle OAD$
= O বিন্দুর চারিদিকে R-এর ভ্রামক।
(এখানে দুই ভ্রামকই ধনাত্মক)

[এই প্রমাণে O বিন্দু BAC কোণের বাহিরে আছে, যদি O বিন্দু BAC কোণের ভিতরে অবস্থিত হয়, তখন



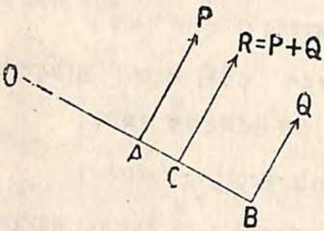
P-এর ভ্রামক + Q-এর ভ্রামক
$= 2\triangle OAB - 2\triangle OAC$
(∵ এখানে Q-এর ভ্রামক ঋণাত্মক)
$= 2\triangle CAD - 2\triangle OAC$
[∵ $\triangle OAB = \triangle DAB = \triangle CAD$]

$= 2\triangle OAD =$ O বিন্দুর চারিদিকে R-এর ভ্রামক।

(খ) দুইটি সমান্তরাল বল।

P এবং Q দুইটি সমান্তরাল বল ; O তাহাদের সমতলে অবস্থিত একটি বিন্দু।

O বিন্দুর ভিতর দিয়া P এবং Q সমান্তরাল বলের লম্বরেখা অঙ্কিত কর ;



ইহা P এবং Q-কে যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

AB রেখার উপর C বিন্দু লও যেন

$$P.AC = Q.BC \quad \cdots\cdots (1)$$

তাহা হইলে P এবং Q-এর লব্ধি R ($=P+Q$), C বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়।

এখন, O বিন্দুর চারিদিকে P বলের ভ্রামক + O বিন্দুর চারিদিকে Q বলের ভ্রামক

$=P.OA+Q.OB$ (দুই ভ্রামকই ধনাত্মক)

$=P(OC-AC)+Q(OC+BC)$

$=(P+Q)OC-P\,AC+Q\,BC$

$=(P+Q(OC-P.AC+P.AC \quad [\therefore \; Q.BC=P.AC]$

$=(P+Q)OC=R.OC$

$=$O বিন্দুর চারিদিকে লব্ধি R-এর ভ্রামক।

[O বিন্দু যদি দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোন অবস্থানে থাকে অথবা বল দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল হয়, প্রত্যেক ক্ষেত্রে ভ্রামককে তাহার নির্দিষ্ট চিহ্নসহ বিবেচনা করিয়া একই ফল পাওয়া যাইবে। ছাত্রেরা নিজেরা অঙ্কন করিয়া পরীক্ষা করিয়া দেখিবে।]

14-9. যে-বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লওয়া হয়, সেই বিন্দুটি যদি লব্ধির উপর থাকে তাহা হইলে লব্ধির ভ্রামক লোপ পায় ; সুতরাং বল দুইটির ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য (0) হইবে। তাহা হইলে একটি বলের ভ্রামক অপর বলের বিপরীত এবং সমান মানের।

14-10. যদি বহু সংখ্যক বলের একটি লব্ধি থাকে তাহা হইলে একটি প্রদত্ত বিন্দুর চারিদিকে বলসমূহের ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল লব্ধির ভ্রামকের সমান।

ধর, O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লওয়া হইয়াছে।

যে-কোন দুইটি বল লও।

O বিন্দুর চারিদিকে ইহাদের ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল

= তাহাদের লব্ধির ভ্রামক।

এখন এই লব্ধি ও তৃতীয় একটি বল লও।

এই তিনটি বলের ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল

= তৃতীয় বলের ভ্রামক + প্রথম দুই বলের লব্ধির ভ্রামক।

= তিনটি বলের লব্ধির ভ্রামক।

এইরূপে অগ্রসর হইয়া আমরা অভীষ্ট ফল পাই।

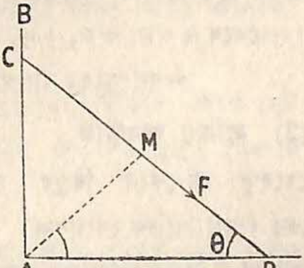
অনুসিদ্ধান্ত 1 : যদি একটি বস্তুর উপর প্রযুক্ত কতকগুলি বল সাম্যাবস্থায় থাকে তাহা হইলে বলগুলি যে সমতলে আছে, সেই সমতলে অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর চারিদিকে বলসমূহের ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য।

বলগুলি সাম্যাবস্থায় আছে অর্থাৎ বলসমূহের লব্ধি শূন্য (0); সুতরাং যে-কোন বিন্দুর চারিদিকে এই লব্ধির ভ্রামক শূন্য। অতএব প্রযুক্ত বলসমূহের ভ্রামকের যোগফল শূন্য (0)।

অনুসিদ্ধান্ত 2 : একটি বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলসমূহের সমতলে অবস্থিত কোন বিন্দুর চারিদিকে বলসমূহের ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য হইলে বলসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকে কিংবা তাহাদের লব্ধি এই বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়।

14-11. উদাহরণ :

একটি উল্লম্ব টেলিগ্রাফের থামে 20 ফুট দীর্ঘ একটি দড়ি বাঁধিয়া দড়ির অপর প্রান্তে একজন লোক টানিতেছে। থামের কোন্ বিন্দুতে দড়ি বাঁধিলে থামটিকে উল্টাইবার সম্ভাবনা সর্বাধিক হইবে?



মনে কর, AB টেলিগ্রাফের থাম, ইহার C বিন্দুতে CD দড়ি বাঁধা হইয়াছে এবং F বল প্রয়োগ করিয়া টানা হইতেছে।

A হইতে CD-র উপর AM লম্ব টানা হইল; মনে কর, $\angle ADC = \theta$

এখন, A বিন্দুর চারিদিকে F বলের ভ্রামক $= F \times AM$

$= F \times AD \sin\theta = F \times CD \cos\theta \sin\theta = F \times \frac{1}{2} CD \sin 2\theta$

$[\because \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta]$

$= 10\,F \sin 2\theta.$

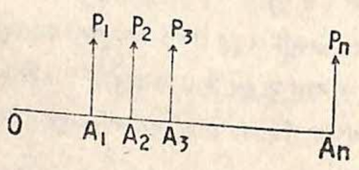
যখন $\sin 2\theta$ সর্বাধিক, তখন, এই মান সর্বাধিক। কিন্তু কোন কোণের সাইনের সর্বাধিক মান $=1$ এবং তখন কোণের মান $90°$; অতএব $2\theta=90°$ এবং $\theta=45°$.

$$AC=CD \sin 45°=20\times\frac{1}{\sqrt{2}}=10\sqrt{2} \text{ ফুট।}$$

∴ $10\sqrt{2}$ ফুট উঁচুতে দড়ি বাঁধিলে উল্টাইবার সম্ভাবনা সর্বাধিক।

14-12. এক সমতলে অবস্থিত সমান্তরাল বলশ্রেণীর লব্ধি নির্ণয়

মনে কর, P_1, P_2, P_3,……P_n বলসমূহ সমান্তরাল সদৃশ (+) বা অসদৃশ (−)। বলসমূহের লম্বভাবে একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর। ইহা বলসমূহের ক্রিয়ারেখাকে A_1, A_2, A_3,…A_n বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O বিন্দু হইতে বলসমূহের দূরত্ব OA_1 OA_2, OA_3,…OA_n প্রদত্ত ; ইহাদিগকে x_1, x_2, x_3,……x_n দ্বারা প্রকাশ করি। মনে কর, বলসমূহের লব্ধির মান R এবং ইহা OA_1…A_n রেখাকে G বিন্দুতে ছেদ করে এবং $OG=\bar{x}$.



লব্ধির মান এবং দূরত্ব $\bar{x}$ নির্ণয় করিতে হইবে।

(1) লব্ধির মান

P_1 এবং P_2 বলের লব্ধি ইহাদের সমান্তরাল বল P_1+P_2 ; এই বল এবং P_3 বলের লব্ধি ইহাদের সমান্তরাল $P_1+P_2+P_3$; এইরূপ ভাবে অগ্রসর হইয়া সর্বশেষে $R=P_1+P_2+P_3+\cdots+P_n$ ……(1)

=বলসমূহের বীজগাণিতিক যোগফল

(2) লব্ধির অবস্থান

যেহেতু যে-কোন বিন্দুর চারিদিকে লব্ধির ভ্রামক=উপাংশসমূহের ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল

অতএব O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$(P_1+P_2+P_3+\cdots+P_n)\bar{x}=P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3+\cdots+P_nx_n$$

$$\therefore\ \bar{x}=\frac{P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3+\cdots+P_nx_n}{P_1+P_2+P_3+\cdots+P_n}\quad\cdots(2)$$

সমীকরণ (1) এবং (2) হইতে লব্ধির মান এবং অবস্থান পাওয়া যায়।

যে বিন্দুর ভিতর দিয়া লব্ধির ক্রিয়া রেখা যায় তাহাকে সমান্তরাল বলসমূহের কেন্দ্র বলে।

$P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$ বলসমূহের প্রয়োগ বিন্দু $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ হইলে G-এর অবস্থান সমান্তরাল বলসমূহের দিকের উপর নির্ভর করে না। অতএব যে বস্তুর উপর সমান্তরাল বলসমূহ ক্রিয়া করে সেই বস্তুর জন্য G একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

14-13. দুইটি কীলকের উপর স্থাপিত ভার-প্রযুক্ত দণ্ডের সাম্যাবস্থা।

একটি দণ্ডে প্রদত্ত কতকগুলি বিন্দুতে ভার প্রযুক্ত হইয়া যদি দণ্ডটি দুইটি কীলকের উপর অনুভূমিক ভাবে স্থাপিত হয়, অনেক সময়ে কীলকের উপর চাপ নির্ণয়ের প্রয়োজন হয়।

কীলকের উপর চাপের সমান ও বিপরীতমুখী প্রতিক্রিয়া দণ্ডের উপর ক্রিয়া করে। এই প্রতিক্রিয়া দুইটি এবং প্রযুক্ত ভারসমূহ সাম্যাবস্থায় থাকে। অতএব,

(1) (প্রতিক্রিয়া সমেত) বলসমূহের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য (এখানে সকল বলই উল্লম্বভাবে সুতরাং সমান্তরাল।)

(2) যে-কোন বিন্দুর চারিদিকে বলসমূহের ভ্রামকের যোগফল শূন্য।

কীলকের প্রতিক্রিয়া যদি এক একটি করিয়া নির্ণয় করিতে চাই তাহা হইলে

(1) প্রতিক্রিয়া দুইটি (R_1 এবং R_2) ও প্রদত্ত ভারসমূহের (বীজগণিতিক) যোগফল = 0 করিয়া প্রতিক্রিয়া দুইটির যোগফল পাওয়া যায়।

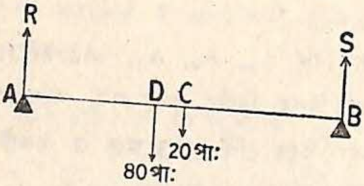
(2) একটি কীলকের চারিদিকে ভ্রামক লও। সেই কীলকের প্রতিক্রিয়ার ভ্রামক শূন্য; সুতরাং ভ্রামকের সমীকরণ হইতে অপর কীলকের প্রতিক্রিয়া R_2 পাওয়া যায়।

[যদি কোন উদাহরণে প্রতিক্রিয়া ঋণাত্মক হয়, বুঝিতে হইবে সেই প্রতিক্রিয়া অধোমুখী এবং কীলকের উপর দণ্ডের চাপ ঊর্ধ্বমুখী; সেখানে কীলকটি দণ্ডের উপর দিকে আছে।]

14-14. উদাহরণ : (1) 10 ফুট দীর্ঘ 20 পাউণ্ড ভারের একটি সমদণ্ড দুই প্রান্তে দুইটি কীলকের উপর রক্ষিত আছে। এক প্রান্ত হইতে 4 ফুট দূরে দণ্ডের উপর একটি 80 পাউণ্ড-ভার প্রযুক্ত হইয়াছে। কীলকের উপর চাপ নির্ণয় কর।

মনে কর, AB দণ্ডের C মধ্যবিন্দু। দণ্ডের ভার এই মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়া

করিতেছে। A হইতে 4 ফুট দূরে D বিন্দুতে 80 পা. ভার প্রযুক্ত হইয়াছে।



মনে কর, কীলকের উপর চাপের সমান ও বিপরীতমুখী প্রতিক্রিয়া যথাক্রমে R এবং S। তাহা হইলে

$R+S=80+20=100$ ....(1)

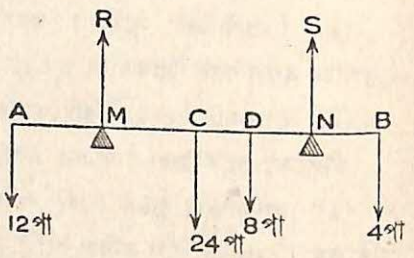
A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$S\times 10=20\times 5+80\times 4$ ....(2)

বা, $10S=100+320=420$

$\therefore$ $S=42$ পা. ; এখন (1) হইতে $R=58$ পা.

(2) একটি 16 ফুট দীর্ঘ 24 পা. ভারের সমদণ্ডের দুই প্রান্তে 12 এবং 4 পা. ভার প্রযুক্ত হইয়াছে। 4 পা. ভার যে প্রান্তে আছে তাহা হইতে 6 ফুট দূরে 8 পা. ভার প্রযুক্ত হইয়াছে। দণ্ডটি 10 ফুট ব্যবধানে দুইটি কীলকের উপর স্থাপিত আছে এবং একটি কীলক হইতে 4 পা ভার-প্রযুক্ত প্রান্ত 2 ফুট বাহিরে আছে। কীলকের উপর চাপ নির্ণয় কর।



M এবং N দুইটি কীলক। কীলকের উপর চাপের বিপরীতমুখী প্রতিক্রিয়া R এবং S দণ্ডের উপর ক্রিয়া করে। দণ্ডের ভার 24 পাউণ্ড মধ্যবিন্দু C-তে ক্রিয়া করে।

$R+S=12+24+8+4=48$ .... 1)

M বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$S.MN+12\,AM-24\,MC-8.\,MD-4.\,MB=0$

অর্থাৎ $10S=24\times 4+8\times 6+4\times 12-12\times 4$

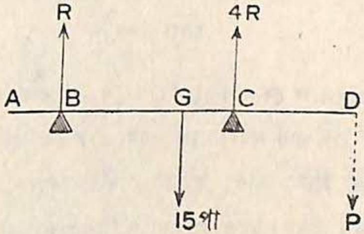
$=96+48+48-48=144$ ....(2)

$\therefore$ $S=14{\cdot}4$ পা.

এখন প্রথম সমীকরণে S-এর মান বসাইয়া $R=33{\cdot}6$ পা.

(3) একটি ভারহীন 2 ফুট দীর্ঘ দণ্ড ABCD-র মধ্যবিন্দুতে 15 পাউণ্ড-ভার বল (নিম্নাভিমুখে) উল্লম্বভাবে প্রয়োগ করা হইয়াছে। দণ্ডটি 10 ইঞ্চি ব্যবধানে

স্থিত দুইটি খুঁটি B এবং C-এর উপর রক্ষিত হইয়াছে এবং C-এর উপর চাপ B-এর উপর চাপের চতুর্গুণ। দণ্ডটি না উল্টাইয়া সর্বাধিক কত বল D বিন্দুতে উল্লম্ব ভাবে (নিম্নাভিমুখে) প্রয়োগ করিতে পারা যাইবে ?



মনে কর, G বিন্দু BA দণ্ডের মধ্যবিন্দু এবং খুঁটি C মধ্যবিন্দু হইতে x ইঞ্চি দূরে আছে। B-তে প্রতিক্রিয়া R হইলে C-তে প্রতিক্রিয়া 4R.

এখন, G বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া R.BG = 4R.CG

$R(10-x)=4R.x \quad \therefore \quad 5x=10, \quad x=2$ ইঞ্চি।

এখন মনে কর, দণ্ডটি না উল্টাইয়া Dতে সর্বাধিক বল P প্রয়োগ করা যায়। এই ক্ষেত্রে B খুঁটির উপর কোন চাপ পড়িবে না ; সমস্তচাপ C খুঁটির উপর পড়িবে। সুতরাং P CD = 15.GC.

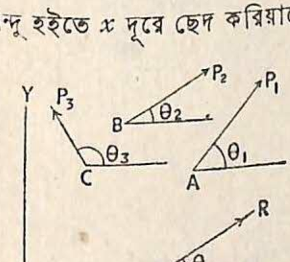
অথবা, $P.10=15\times2 \quad \therefore \quad P=3$ পা. ভার।

***14·15. বস্তুর উপর প্রযুক্ত বলশ্রেণীর লব্ধি (Resultant of a system of forces acting on a body)**

কোন বস্তুতে প্রযুক্ত বলসমূহের যদি একটি লব্ধি থাকে তাহা নিম্নে উপায়ে নির্ণয় করা যায় :

OX এবং OY দুইটি পরস্পর লম্বাভিমুখী সরল রেখা লও।

মনে কর, R লব্ধি এবং ইহা OX সরলরেখার সহিত θ কোণ করিয়া OX-কে O বিন্দু হইতে x দূরে ছেদ করিয়াছে।



বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল P_1, P_2, P_3,....ইত্যাদি OX রেখার সমান্তরাল দিকের সহিত $\theta_1, \theta_2, \theta_3$,.... ইত্যাদি প্রদত্ত কোণ করিয়াছে। এই বলসমূহের প্রত্যেককে OX-এর সমান্তরাল দিকে ও তাহার লম্ব দিকে বিশ্লেষণ কর।

OX এবং OY-র দিকে লব্ধি R-এর বিশ্লেষিতাংশ উহাদের সমান্তরাল দিকে, প্রদত্ত বলসমূহের বিশ্লেষিতাংশের যোগফল

$\therefore$ $R\cos\theta = P_1\cos\theta_1 + P_2\cos\theta_2 + P_3\cos\theta_3 + \cdots = X$ (1)

$R\sin\theta = P_1\sin\theta_1 + P_2\sin\theta_2 + P_3\sin\theta_3 + \cdots = Y$ (2)

(1) এবং (2) হইতে $R^2 = X^2 + Y^2$ ....(I)

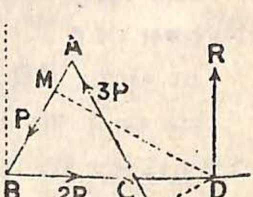
$$\tan\theta = \frac{Y}{X} \quad \text{....(II)}$$

এখন R যে বিন্দুতে OX-কে ছেদ করিয়াছে (Y যদি 0 হয় তাহা হইলে লব্ধি OX-এর সমান্তরাল এবং OY-কে ছেদ করিবে) সেই বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লও ; তাহা হইলে প্রদত্ত বলসমূহের ভ্রামকের যোগফল 0 (শূন্য) হইবে। ইহা হইতে আমরা θ নির্ণয় করিবার জন্য তৃতীয় (III) সমীকরণ পাই।

এই তিনটি সমীকরণ (I, II এবং III) হইতে লব্ধি R সম্পূর্ণরূপে জানা যাইবে। সমীকরণ (I) হইতে লব্ধির মান, (II) হইতে OX রেখার সহিত তাহার নতি এবং (III) সাহায্যে লব্ধি OX-কে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহা পাই।

উদাহরণ : তিনটি বল P, 2P, 3P যথাক্রমে একটি সমবাহু ত্রিভুজের AB, BC, CA বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। তাহাদের লব্ধির মান এবং দিক্ নির্ণয় কর এবং ইহার ক্রিয়ারেখার সহিত BC বাহুর ছেদবিন্দু নির্ণয় কর। [ক. বি. 1953]

মনে কর, লব্ধি R, BC রেখার সহিত θ কোণ করে এবং BC রেখাকে B বিন্দু হইতে x দূরে ছেদ করে।



BC এবং BC-র লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ করিয়া

$R\cos\theta = 2P - 3P\cos 60^\circ - P\cos 60^\circ$

$= 2P - 4P\cos 60^\circ$

$= 2P - 4P\times\frac{1}{2} = 0$ .... (1)

$R\sin\theta = 3P\sin 60^\circ - P\sin 60^\circ$

$= 2P\sin 60^\circ$

$= 2P\times\frac{\sqrt{3}}{2} = P\sqrt{3}$ .... (2)

মনে কর, ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য $= a$

লব্ধি এবং BC রেখার ছেদবিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$2P\times 0 - 3P.(x-a)\sin 60^\circ + P.x\sin 60 = 0.$

$-3x + 3a + x = 0.$ অথবা, $2x = 3a.$

$x = \frac{3a}{2}$ ....(3)

অতএব লব্ধির মান $P\sqrt{3}$.

ইহা BC-র লম্বাভিমুখে

এবং ইহা বর্ধিত BC-কে B বিন্দু হইতে BC-র দেড়গুণ দূরে ছেদ করে।

প্রশ্নমালা 13

1. 16 পাউণ্ড-ভারের বল A বিন্দুতে প্রযুক্ত হইয়া AB রেখা বরাবর ক্রিয়া করিতেছে। A বিন্দু হইতে 2ফুট দূরে O একটি বিন্দু। O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক নির্ণয় কর।

যখন OAB কোণ (i) $30°$; (ii) $60°$; (iii) $90°$; (iv) $135°$, (v) $150°$.

2. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ; ইহার প্রত্যেক বাহু 6 ইঞ্চি। BC, CA এবং AB বাহু বরাবর 2, 4 এবং 6 পা. ভার ক্রিয়া করে। বিপরীত শীর্ষবিন্দুর চারিদিকে প্রত্যেক বলের ভ্রামক নির্ণয় কর।

3. ABCD বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহু 10 ইঞ্চি। AB এবং AD-এর দিকে 7 এবং 24 পাউণ্ড ভার বল প্রযুক্ত হইলে, C বিন্দু হইতে লব্ধি বলের দূরত্ব নির্ণয় কর।

4. ABCD আয়তক্ষেত্রের AB এবং AD বাহু বরাবর 24 পা. এবং 10 পা. ভার বল ক্রিয়া করে। AB বাহু 2 ফুট এবং AD বাহু 3 ফুট হইলে C বিন্দু হইতে লব্ধির ক্রিয়ারেখার দূরত্ব নির্ণয় কর।

5. একটি 6 ফুট দীর্ঘ এবং 10 পাউণ্ড ভারের সমদণ্ডের দুই প্রান্ত হইতে 8 পা. এবং 16 পা. ভার ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে। কোন্ বিন্দু হইতে দণ্ডটিকে ঝুলাইলে উহা অনুভূমিক থাকিবে?

6. একটি 10 ফুট দীর্ঘ এবং 60 পাউণ্ড-ভারের সমদণ্ডের দুই প্রান্তে 20 পা. এবং 30 পা. ভার ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে। কোন্ বিন্দুতে দণ্ডটি সুস্থিত (balance) করা যাইবে?

7. একটি ভারহীন 20 ইঞ্চি দীর্ঘ সরল দণ্ডে 5 ইঞ্চি অন্তর 2, 3, 4, 5, 6 সদৃশ সমান্তরাল বলসমূহ ক্রিয়া করিতেছে; ইহাদের লব্ধির প্রয়োগবিন্দু নির্ণয় কর।

8. 10, 20, 30, 40 এবং 50 গ্রাম ভার এক প্রান্ত হইতে আরম্ভ করিয়া 8 সেন্টিমিটার অন্তর একটি 32 সেন্টিমিটার দীর্ঘ সরল ভারহীন দণ্ড হইতে ঝুলান

হইয়াছে। দণ্ডের কোন্ বিন্দুতে একটি দড়ি বাঁধিয়া ঝুলাইলে দণ্ডটি অনুভূমিকভাবে থাকিবে?

9. একটি 10 ফুট দীর্ঘ সমদণ্ডের এক প্রান্ত হইতে 2, 4, 6, এবং 8 ফুট দূরে যথাক্রমে 2, 4, 6, এবং 8 পা. ভার ঝুলান হইয়াছে। যদি দণ্ডের ভার 5পা. হয়, তাহা হইলে দণ্ডটি কোন্ বিন্দুতে সুস্থিত (balance) করা যাইবে ?

10. 5 ফুট দীর্ঘ এবং 4পা. ভারের একটি সমদণ্ড একপ্রান্ত হইতে 1 ফুট দূরে একটি বিন্দুর উপর ঘুরিতে পারে ; ঐ প্রান্ত হইতে 10 পা. ভার ঝুলান হইয়াছে। অপর প্রান্তে কত ভার প্রয়োগ করিলে দণ্ডটি অনুভূমিকভাবে থাকিবে ?

11. একটি 8 ফুট দীর্ঘ এবং 11 পাউণ্ড ভারের সমদণ্ড এক প্রান্ত হইতে 3 ফুট দূরে একটি দড়ি দিয়া ঝুলান হইয়াছে এবং সেই প্রান্তে 12 পা. ভার প্রযুক্ত হইয়াছে। অন্য প্রান্তে কি ভার প্রয়োগ করিলে দণ্ডটি অনুভূমিকভাবে সাম্যাবস্থায় থাকিবে ?

12. 20 ইঞ্চি দীর্ঘ একটি ভারহীন দণ্ড 10 ইঞ্চি ব্যবধানে দুইটি কীলকের উপর রক্ষিত হইয়াছে ; ইহার দুই প্রান্তে 8 পাউণ্ড এবং 12 পাউণ্ড-ভার ঝুলান হইয়াছে। যদি কীলক দুইটির উপর সমান ভার পড়ে তাহা হইলে দণ্ডটিকে কিরূপে রাখা হইয়াছে ?

13. একটি সমদণ্ডের ভার 32 পাউণ্ড ; ইহাকে দুই প্রান্তে দুইটি উল্লম্ব দড়ির সাহায্যে অনুভূমিকভাবে ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে। কোন দড়ি 28 পাউণ্ডের বেশি ভার বহন করিতে পারে না। দণ্ডের মধ্যবিন্দু হইতে কতদূরে 16 পাউণ্ড-ভার ঝুলাইলে একটি দড়ি ছিঁড়িয়া যাইবার উপক্রম করিবে ?

14. একটি সমদণ্ডের দৈর্ঘ্য 10 ফুট এবং ভার 40 পাউণ্ড ; ইহা ভূমির উপর রক্ষিত আছে ; এক প্রান্ত হইতে 4 ফুট দূরে দণ্ডটির উপর 80 পাউণ্ড ভার প্রয়োগ করা হইয়াছে। অপর প্রান্তে উল্লম্বভাবে কি বল প্রয়োগ করিলে ঐ প্রান্ত ভূমি হইতে আল্‌গা হইতে আরম্ভ করিবে ?

15. 16 ইঞ্চি দীর্ঘ একটি দণ্ড 10 ইঞ্চি ব্যবধানে মধ্যবিন্দু হইতে সমদূরবর্তী দুইটি কীলকের উপর স্থাপিত হইয়াছে। দণ্ডের এক প্রান্ত হইতে 4 পা. অথবা অপর প্রান্ত হইতে 6 পা. ঝুলাইলে দণ্ডটি উল্টিয়া যাইতে চায়। দণ্ডের ভার নির্ণয় কর এবং ভার কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করে নির্ণয় কর।

16. 20 ফুট দীর্ঘ এবং 100 পাউণ্ড ভারের একটি সমভার তক্তা অনুভূমিকভাবে দুইটি স্তম্ভের উপর রক্ষিত হইয়াছে। তক্তার এক প্রান্ত হইতে একটি স্তম্ভ 5 ফুট দূরে এবং অপর প্রান্ত হইতে দ্বিতীয় স্তম্ভ 8 ফুট দূরে। 60 পাউণ্ড ভারের একটি বালক দ্বিতীয় স্তম্ভ হইতে তক্তার উপর দিয়া উহার নিকটস্থ প্রান্তের দিকে যাইতে থাকিলে সে নিরাপদে কতদূর পর্যন্ত যাইতে পারে এবং তখন স্তম্ভ দুইটির প্রতিক্রিয়া কত ?

17. 15 ফুট দীর্ঘ এবং 120 পাউণ্ড-ভারের একটি সমদণ্ড অনুভূমিকভাবে দুইটি কীলকের উপর স্থাপিত হইয়াছে। কীলক দুইটি দণ্ডের দুই প্রান্ত হইতে 5 ফুট এবং 3 ফুট দূরে অবস্থিত। যদি কোন কীলকই 200 পাউণ্ড ভারের অধিক চাপ বহন করিতে না পারে, তাহা হইলে দুই প্রান্তে সর্বাধিক কি পরিমাণ সমান ভার রাখা যায় ?

18 একটি দণ্ড দুইটি সমান্তরাল দড়ি দিয়া ঝুলান হইয়াছে ; যখন দড়ি দুইটি দণ্ডের দুই প্রান্তে থাকে তখন টান 20 ও 40 পাউণ্ড-ভার। কিন্তু যখন দড়ি প্রান্তদ্বয় হইতে 1 ফুট দূরে বাঁধা হয় তখন টান 18 এবং 42 পাউণ্ড-ভার ; দণ্ডের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

19. একটি 9 ফুট দীর্ঘ সমদণ্ডকে দুই প্রান্তে দুইটি কীলকের উপর স্থাপন করা হইয়াছে। প্রত্যেক কীলকের উপর চাপ 10 পাউণ্ড-ভার। 80 পাউণ্ড-ভার কোথায় স্থাপন করিলে একটি কীলকের উপর চাপ 40 পাউণ্ড-ভার পড়িবে ?

20. একটি সমদণ্ডের দৈর্ঘ্য 16 ফুট এবং উহার ভার 30 পাউণ্ড। ইহা দুই প্রান্তে দুইটি কীলকের উপর স্থাপিত হইয়াছে এবং এক প্রান্ত হইতে 4 ফুট দূরে 80 পাউণ্ড-ভার ঝুলাইয়া দেওয়া হইয়াছে। কীলকের উপর চাপ নির্ণয় কর।

21. 2 ফুট দীর্ঘ একটি ভারহীন দণ্ড তাহার একপ্রান্তে একটি অক্ষের চারিদিকে ঘুরিতে পারে। ঐ প্রান্ত হইতে 4 ইঞ্চি দূরে একটি উল্লম্ব দড়ির সাহায্যে দণ্ডটি অনুভূমিকভাবে রাখা হইয়াছে। দড়িটি 12 আউন্সের বেশি ভার বহন করিতে পারে না। দড়ি ছিঁড়িয়া না যায় এরূপভাবে দণ্ডের অপর প্রান্তে সর্বাপেক্ষা বেশি কত ভার প্রয়োগ করা যায় ?

22. P, 2P, 3P এবং 4P বল যথাক্রমে একটি বর্গক্ষেত্রের AB, BC, CD এবং DA বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। ইহাদের লব্ধির মান ও দিক্ নির্ণয় কর এবং ইহার ক্রিয়ারেখার সহিত AB বাহুর ছেদবিন্দু নির্ণয় কর।

23. 1, 2, 4, 5 পাউণ্ড ভারের বল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্রমানুসারে গৃহীত চারি বাহু বরাবর ক্রিয়া করিতেছে। প্রমাণ কর যে, ইহাদের লব্ধি একটি কর্ণের সমান্তরাল। প্রথম বল যে বাহু বরাবর ক্রিয়া করে সেই বাহুকে লব্ধি কোথায় ছেদ করে নির্ণয় কর।

24. 120 গ্রাম ভারবিশিষ্ট এবং 1 মিটার দীর্ঘ একটি সমদণ্ড উহার দুই প্রান্ত A এবং B-তে উল্লম্বভাবে সংযুক্ত দুইটি স্প্রিং তুলা সাহায্যে অনুভূমিক অবস্থায় ঝুলান আছে। যখন দণ্ডের C বিন্দু হইতে 300 গ্রাম ভার-ঝুলান হয় তখন A প্রান্তের তুলায় 270 গ্রাম ভার সূচিত হয়। B প্রান্তের তুলায় কত ভার সূচিত হইবে এবং AC-র দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

25. 20 ফুট দীর্ঘ একটি দণ্ডের একপ্রান্ত ভূমিতে স্থাপিত, অপর প্রান্তে অনুভূমিক তলের সহিত 30° নতিতে একটি দড়ি বাঁধিয়া টানা হইতেছে এবং দড়ির টান 30 পাউণ্ড ভার; ভূমি হইতে 4 ফুট উচ্চে কি অনুভূমিক বল প্রয়োগ করিলে দণ্ডটি উল্লম্ব অবস্থায় থাকিবে?

26. একটি বলের ক্রিয়া-রেখা P এবং Q বিন্দুর সংযোজক সরল রেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করে। যদি P এবং Q বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক $+M$ এবং $-N$ হয়, তাহা হইলে $\frac{PR}{PQ}$ অনুপাত নির্ণয় কর।

27. Ox এবং Oy দুইটি পরস্পর লম্বাভিমুখী সরলরেখা এবং ইহাদের সমতলে O বিন্দুতে একটি বল ক্রিয়া করিতেছে। দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x, y) এবং (x', y'); এই দুই বিন্দুর চারিদিকে বলটির ভ্রামক G এবং G'. যদি $(xy'-x'y)$ শূন্য না হয় তাহা হইলে বলের মান R এবং Ox-এর সঙ্গে তাহার ক্রিয়া রেখার নতি θ-র জন্য

$$R^2=\frac{(xG'-x'G)^2+(yG'-y'G)^2}{(xy'-x'y)^2} \text{ এবং } \tan\theta=\frac{yG'-y'G}{xG'-x'G}.$$

সমাধান:

Ox এবং Oy-র দিকে R-এর বিশ্লেষিতাংশ যথাক্রমে $R\cos\theta$ এবং $R\sin\theta$. (x,y) বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$yR\cos\theta-xR\sin\theta=G\cdots\cdots(1)$$

(x', y') বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$y'R\cos\theta-x'R\sin\theta=G'\cdots\cdots(2)$$

এই দুই সমীকরণ সমাধান করিয়া

$$R\cos\theta = \frac{yG' - y'G}{xy' - x'y}\ldots(3) \text{ এবং } R\sin\theta = \frac{xG' - x'G}{xy' - x'y}\ldots(4)$$

উভয়ের বর্গ লইয়া যোগ করিলে

$$R^2 = \frac{(xG' - x'G)^2 + (yG' - y'G)^2}{(xy' - x'y)^2}$$

(4) কে (3) দিয়া ভাগ করিলে $\tan\theta = \dfrac{xG' - x'G}{yG' - y'G}$

28. AB এবং BC দুইটি ভারী সমদণ্ডের দৈর্ঘ্য a এবং b : তাহাদের ভার যথাক্রমে wa এবং wb। B প্রান্তে ABC একটি সমকোণ করিয়া ইহারা দৃঢ়ভাবে সংযুক্ত। যদি সমগ্রভাবে ইহাকে A বিন্দু হইতে ঝুলান হয় প্রমাণ কর যে উল্লম্বের সঙ্গে AB-র নতি $\tan^{-1}\dfrac{b^2}{a^2+2ab}$.

29. P, Q এবং R বল ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত BC, CA এবং AB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে ; যদি ইহাদের লব্ধি ভরকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়, দেখাও যে

$$\frac{P}{\sin A} + \frac{Q}{\sin B} + \frac{R}{\sin C} = 0$$

30. P, Q এবং R বল ABC ত্রিভুজের BC, CA এবং AB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। যদি ইহাদের লব্ধি ত্রিভুজের লম্ববিন্দুর (ortho-centre) ভিতর দিয়া যায়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে

$$\frac{P}{\cos A} + \frac{Q}{\cos B} + \frac{R}{\cos C} = 0$$

31. P, Q এবং R বল ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত BC, CA এবং AB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। যদি ইহাদের লব্ধি অন্তঃকেন্দ্র (incentre) এবং পরিকেন্দ্রের (circum-centre) ভিতর দিয়া যায়, প্রমাণ কর যে

$$\frac{P}{\cos B - \cos C} = \frac{Q}{\cos C - \cos A} = \frac{R}{\cos A - \cos B}$$

[**সংকেত :** যেহেতু লব্ধি বল অন্তঃকেন্দ্র এবং পরিকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়, অতএব এই দুই বিন্দুর প্রত্যেকের চারিদিকে লব্ধির ভ্রামক 'শূন্য'। সুতরাং এই বিন্দুদ্বয়ের চারিদিকে ভ্রামক লইলে ক্রিয়মাণ বলসমূহের ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল শূন্য হইবে।

অন্তঃকেন্দ্রের চারিদিকে ভ্রামক লইলে পাইবে

$Pr+Qr+Rr=0$ (r অন্তঃবৃত্তের ব্যাসার্ধ)

$\therefore\ P+Q+R=0\cdots\cdots(1).$

আবার পরিকেন্দ্রের চারিদিকে ভ্রামক লইলে পাইবে

$PR' \cos A+QR' \cos B+RR' \cos C=0$

(R′ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ)

$\therefore\ P \cos A+Q \cos B+R \cos C=0\cdots\cdots(2)$

(2) এর নীচে (1) লিখিয়া বজ্রগুণন প্রণালীর দ্বারা নির্ণেয় ফল পাইবে]

32. P, Q এবং R বল ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত BC, CA এবং AB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। যদি ইহাদের লব্ধি অন্তঃকেন্দ্র এবং ভরকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়, প্রমাণ কর যে

$$\frac{P}{a(b-c)}=\frac{Q}{b(c-a)}=\frac{R}{c(a-b)}.$$

33. তিনটি বল ABC ত্রিভুজের যথাক্রমে গৃহীত তিনটি বাহু BC, CA এবং AB বরাবর ক্রিয়া করে। তাহাদের লব্ধি ত্রিভুজের লম্ববিন্দু এবং ভারকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়। দেখাও যে বল তিনটি নিম্ন অনুপাত আছে :

$\sin 2A \sin (B-C) : \sin 2B \sin (C-A) : \sin 2C \sin (A-B)$

34. P, Q, R তিনটি বল ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত BC, CA এবং AB বাহু বরাবর ক্রিয়া করে। যদি ইহাদের লব্ধির ক্রিয়া রেখা ত্রিভুজের লম্ববিন্দু এবং পরিকেন্দ্রের মধ্য দিয়া যায়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{P}{(b^2-c^2)\cos A}=\frac{Q}{(c^2-a^2)\cos B}=\frac{R}{(a^2-b^2)\cos C}$$

35. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ ; BC, CA এবং AB বাহুর দৈর্ঘ্য 13, 12 এবং 5 একক। A, B এবং C বিন্দুর চারিদিকে একটি বলের ভ্রামক যথাক্রমে 0, 25 এবং 144 একক ; বলটি সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় কর। [ক. বি.]

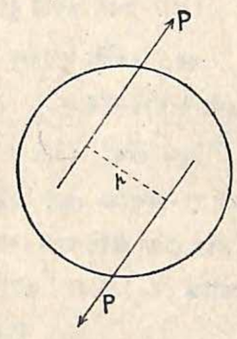
উঃ। 13 একক ; ABC ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের A বিন্দুতে স্পর্শকের দিকে।

পঞ্চদশ পরিচ্ছেদ

যুগ্মবল
Couple

15-1. **সংজ্ঞা**। দুইটি সমান, অসদৃশ সমান্তরাল বলকে **যুগ্মবল** বা **কাপ্‌ল্** (couple) বলা হয়।

কোন বস্তুর উপর কাপ্‌ল্ ক্রিয়া করিলে বস্তুটি ঘুরিতে থাকে। ঘড়িতে যখন চাবি দেওয়া হয় কাপ্‌ল্ ক্রিয়া করে ; দরজার হাতল ঘুরাইয়া যখন দরজা খোলা হয় তখন কাপ্‌ল্ প্রয়োগ করা হয়। জলের কল খুলিবার সময় কাপ্‌ল্ প্রয়োগ করা হয়।



কাপ্‌ল্-এর বল দুইটির দূরত্বকে উহার **বাহু** বলে। একটি বলের ক্রিয়ারেখাতে কোন বিন্দু লইয়া উহা হইতে অপর বলের ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব অঙ্কিত করিলে বাহু পাওয়া যায়। বল দুইটি P, P হইলে বাহু p দিয়া নির্দেশ করা হয়।

কাপ্‌ল্-এর বল দুইটি P, P হইলে কাপ্‌ল্ (P, P) বলিয়া বর্ণনা করা হয়।

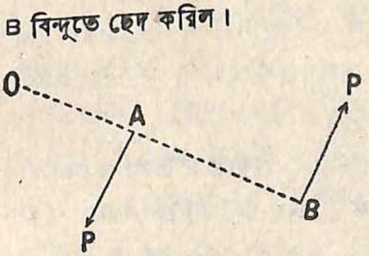
কাপ্‌ল্-এর ভ্রামক বলিতে একটি বল ও বাহুর গুণফল বুঝায়।

কাপ্‌ল্-এর চিহ্ন এবং একক ভ্রামকের চিহ্ন এবং একক দিয়া ঠিক করা হয়।

15-2. **কাপ্‌ল্ এর সমতলে অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর চারিদিকে বল দুইটির ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল ধ্রুবক (constant) এবং ইহা কাপ্‌ল্-এর ভ্রামকের সমান।**

মনে কর, কাপ্‌ল্‌টির প্রত্যেক বল P-এর সমান ; O তাহাদের সমতলে যে-কোন একটি বিন্দু।

বল দুইটির লম্বভাবে OAB রেখা অঙ্কিত কর। ইহা বল দুইটিকে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করিল।



O-বিন্দুর চারিদিকে বল দুইটির ভ্রামকের (বীজগাণিতিক) যোগফল

$= P.OB - P.OA$

$= P(OB - OA) = P.AB$

= যুগ্মবলের (couple) ভ্রামক।

O-বিন্দুর অবস্থানের উপর ইহা নির্ভর করিতেছে না সুতরাং সর্বদাই এক বা ধ্রুবক।

[এখানে O-বিন্দু বল দুইটির বাহিরে লওয়া হইয়াছে, একটি বলের ভ্রামক ধনাত্মক, অপরের ভ্রামক ঋণাত্মক ; O-বিন্দু বল দুইটির ভিতরে অবস্থিত হইলে দুই বলেরই ভ্রামক একই চিহ্নের হইবে। ছাত্রেরা ছবি আঁকিয়া নিজেরা প্রমাণ করিবে।]

*15-3. **দুইটি সমান ও বিপরীত যুগ্মবল (couple) সাম্যবস্থায় থাকে।**

(ক) যখন দুইটি যুগ্মবলের চারিটি বলই সমান্তরাল নহে

ধর, একটি যুগ্মবল (P, P) এবং তাহার বাহু p, অপর যুগ্মবল (Q, Q) এবং তাহার বাহু q.

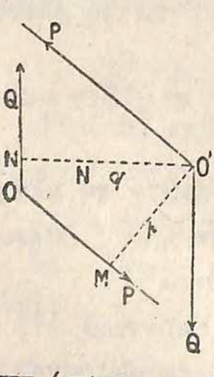
মনে কর, একটি P এবং একটি Q, O-বিন্দুতে ছেদ করে এবং অপর দুইটি বল O′-বিন্দুতে ছেদ করে। O′-বিন্দু হইতে O বিন্দুগামী P এবং Q-এর উপর O′M এবং O′N লম্ব টান ; এই লম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য p এবং q। দেওয়া আছে যে, (P, P) এবং (Q, Q) দুইটি সমান বিপরীত যুগ্মবল।

$$\therefore \quad P.p = Q.q \text{ অর্থাৎ } P.O'M = Q.O'N$$

এখন, O′ বিন্দুর চারিদিকে, O-বিন্দুগামী P এবং Q বলদ্বয়ের ভ্রামকের যোগফল

$$= P.O'M - Q\,O'N = P.O'M - P.O'M \text{ [কারণ, } P.O'M = Q.O'N \text{]}$$
$$= 0$$

∴ O বিন্দুগামী P এবং Q বলের লব্ধি O′ বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়।



এইরূপে O বিন্দুর চারিদিকে O′ বিন্দুগামী P এবং Q-এর ভ্রামক লইয়া দেখান যায় যে, এই দুই বলের লব্ধি O-বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়।

তাহা হইলে O-বিন্দুগামী P এবং Q-এর লব্ধি OO′ অভিমুখে এবং O′-বিন্দুগামী P এবং Q-এর লব্ধি O′O অভিমুখে।

আবার যেহেতু O-বিন্দুতে P এবং Q যে-কোণ করে, O′ বিন্দুতে P এবং Q তাহার সমান কোণ করে (কারণ P, P এবং Q, Q সমান্তরাল), অতএব O-বিন্দুতে P এবং Q-এর লব্ধির মান O′ বিন্দুতে P এবং Q-এর লব্ধির মানের সমান। [P এবং Q -এর অন্তর্ভূত কোণ α হইলে উভয় ক্ষেত্রে লব্ধি= $\sqrt{P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha}$।]

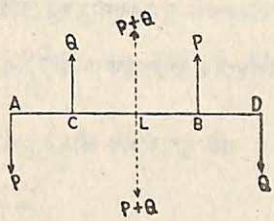
O-বিন্দুতে P এবং Q-এর লব্ধি, O′ বিন্দুতে P এবং Q-এর লব্ধির সমান ও বিপরীতমুখী বলিয়া তাহারা সাম্যাবস্থায় আছে।

(খ) যখন দুইটি যুগ্মবলের চারিটি বলই সমান্তরাল

(P, P) এবং (Q, Q) দুইটি সমান ও বিপরীত যুগ্মবল, ইহাদের লম্বভাবে যে-কোন একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর। এই রেখা বলগুলিকে A, B, C, D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

দেওয়া আছে

$P.AB = Q.CD$ .... (1)



মনে কর, B এবং C বিন্দুতে P এবং Q সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি P + Q, L-বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়, তাহা হইলে

$P.BL = Q.CL$ .... (2)

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া

$$P.AL = Q.DL$$

অতএব A এবং D বিন্দুতে P এবং Q সমান্তরাল বলদ্বয়ের লব্ধি P + Q, L-বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়।

যেহেতু B এবং C-তে ক্রিয়াশীল P এবং Q বলের লব্ধি, A এবং D-তে ক্রিয়াশীল P এবং Q-এর লব্ধির সমান ও বিপরীতমুখী, অতএব তাহারা সাম্যাবস্থায় আছে।

অনুসিদ্ধান্ত : সমান ভ্রামকবিশিষ্ট দুইটি যুগ্মবল (couples) সমান ফলদায়ী।

একটি যুগ্মবলের পরিবর্তে একই সমতলে সমান ভ্রামকের অন্য যে-কোন যুগ্মবল নেওয়া যায়।

***15-4. কোন বস্তুর উপর ক্রিয়মাণ এক সমতলে অবস্থিত বহু-সংখ্যক যুগ্মবল একটি যুগ্মবলের সমান এবং এই লব্ধি যুগ্মবলের ভ্রামক যুগ্মবলসমূহের ভ্রামকের (বীজগাণিতিক) যোগফলের সমান।**

মনে কর, যুগ্মবলসমূহ p-বাহুবিশিষ্ট (P, P), q-বাহুবিশিষ্ট (Q, Q), r-বাহুবিশিষ্ট (R, R) ইত্যাদি।

(Q, Q) যুগ্মবলের পরিবর্তে (P, P) যুগ্মবলের ক্রিয়ারেখাতে ক্রিয়মাণ সমান ভ্রামকের (X, X) যুগ্মবল লও। তাহা হইলে $X.p=Q.q$

$$\therefore \quad X=\frac{Q.q}{p}$$

এইরূপ (R, R) যুগ্মবলের পরিবর্তে (P, P) যুগ্মবলের ক্রিয়ারেখাতে ক্রিয়মাণ $\left(\frac{R.r}{p}, \ \frac{R.r}{p}\right)$ যুগ্ম বল লও এবং অনুরূপে অন্যান্য যুগ্মবলের পরিবর্তেও এই ব্যবস্থা কর।

এখন যুগ্মবলসমূহের পরিবর্তে p-বাহুবিশিষ্ট একটি যুগ্মবল পাইলাম ; ইহার বলদ্বয়ের প্রত্যেকে $P+\frac{Qq}{p}+\frac{Rr}{p}+\cdots\cdots$

এই যুগ্মবলের ভ্রামক $=\left(P+\frac{Q.q}{p}+\frac{R.r}{p}+\cdots\right)p$

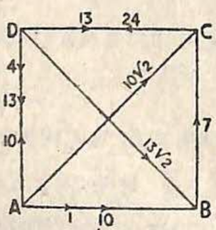
$=P.p+Q.q+R.r+\cdots\cdots$

$=$ যুগ্মবলসমূহের ভ্রামকের যোগফল

অতএব বহুসংখ্যক যুগ্মবল একটি যুগ্মবলের সমান এবং লব্ধি যুগ্মবলের ভ্রামক প্রদত্ত যুগ্মবলসমূহের ভ্রামকের বীজগাণিতিক যোগফল।

[এখানে প্রত্যেক যুগ্মবলকে তাহার যথাযথ চিহ্নসহ বিবেচনা করা হইয়াছে।]

15-5. উদাহরণ : ABCD একটি বর্গক্ষেত্র, ইহার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 2 ফুট। AB, BC, CD এবং DA বাহু বরাবর 1, 7, 24 এবং 4 পাউণ্ড-ভার বল ক্রিয়া করিতেছে, এবং AB ও DB বরাবর $10\sqrt{2}$ এবং $13\sqrt{2}$ বল ক্রিয়া করে। ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।



AC বরাবর $10\sqrt{2}$ পা. বল AB এবং AD বরাবর 10 পা. এবং 10 পা.-এর লব্ধি ; DB বরাবর $13\sqrt{2}$ পা. বল DA এবং DC বরাবর 13 পা. এবং 13 পা.-এর লব্ধি।

অতএব আমরা পাইতেছি

AB বরাবর $1+10=11$ পা.

BC বরাবর 7 পা.

CD বরাবর $24-13=11$ পা.

DA বরাবর $4+13-10=7$ পা.

তাহা হইলে AB এবং CD বরাবর 11 এবং 11 পা., 2 ফুট বাহুবিশিষ্ট একটি যুগ্মবল এবং BC ও DA বরাবর 7 এবং 7 পা., 2 ফুট বাহুবিশিষ্ট আর একটি যুগ্মবল পাই। ইহারা একটি যুগ্মবলের সমান এবং

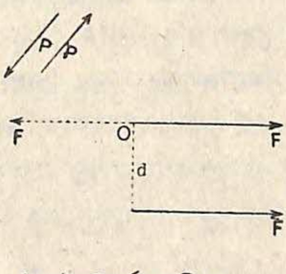
এই যুগ্মবলের ভ্রামক $= 11\times 2 + 7\times 2 = 22 + 14 = 36$ ফু. পা. একক।

*15-6. একটি বল ও যুগ্মবলের লব্ধি

(Resultant of a force and a couple)

মনে কর, F বল O-বিন্দুতে প্রয়োগ করা হইয়াছে এবং (P, P) একটি যুগ্মবল। (P, P) যুগ্মবলের পরিবর্তে ইহার সমান ভ্রামকবিশিষ্ট আর একটি যুগ্মবল এরূপভাবে লই যেন ইহার দুইটি বল (F, F) এবং ইহাদের মধ্যে একটি O-বিন্দুতে প্রদত্ত F বলের বিপরীত। এই নূতন যুগ্মবলের বাহু যদি d হয়

তাহা হইলে $F.d = P\,p \quad \therefore \quad d = \frac{P.p}{F}$

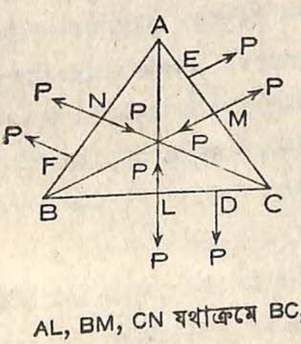


এখন নির্ণেয় লব্ধি, প্রদত্ত বল F এবং নূতন (F, F) যুগ্মবলের লব্ধির সমান। কিন্তু O-বিন্দুতে ক্রিয়মাণ F এবং F বল দুইটি সমান ও বিপরীতমুখী বলিয়া ইহারা সাম্যাবস্থায় থাকে। অতএব প্রদত্ত F-বলের সমান্তরাল এবং তাহা হইতে $\frac{P.p}{F}$ দূরে একটি বল F রহিল। ইহাই নির্ণেয় লব্ধি।

লক্ষ্য কর: একটি যুগ্মবল ও তৃতীয় একটি বল কখনও সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে না—তাহাদের লব্ধি তৃতীয় বলের সমান ও সমান্তরাল বল;

তৃতীয় বল হইতে ইহার দূরত্ব $= \dfrac{\text{যুগ্মবলের ভ্রামক}}{\text{তৃতীয় বল}}$

উদাহরণ: ABC সমবাহু ত্রিভুজের BC, CA এবং AB বাহুকে D, E এবং F বিন্দু যথাক্রমে 5 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে। D, E এবং F বিন্দুতে P মানের তিনটি বল ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্বভাবে বহির্মুখে ক্রিয়া করিতেছে। ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু a হইলে দেখাও যে এই তিনটি বল P.a ভ্রামকের একটি যুগ্মবলের সমান।



AL, BM, CN যথাক্রমে BC, CA এবং AB বাহুর উপর লম্ব অঙ্কিত হইল।

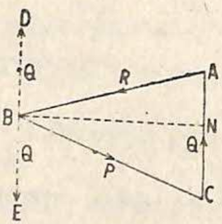
L, M এবং N বিন্দুতে যথাক্রমে 3 জোড়া সমান বিপরীত বল P, বাহুগুলির লম্বভাবে প্রযুক্ত হইল। বস্তুর উপর উহাদের কোন ক্রিয়া নাই।

এখন আমরা DL, EM ও FN বাহুবিশিষ্ট তিনটি যুগ্মবল এবং AL, BM, CN বরাবর ক্রিয়াশীল তিনটি বল-P পাই ; এই তিনটি বল একবিন্দুগামী সমান বল। ইহারা ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বাভিমুখী এবং BC, CA, AB বাহুর দ্বারা যথাক্রমে ইহাদের মান সূচিত হইতে পারে। অতএব বলের ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে এই তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকে।

$DL = BD - BL = \frac{5}{6}a - \frac{1}{2}a = \frac{1}{3}a$, অনুরূপে $EM = \frac{1}{3}a$ এবং $FN = \frac{1}{3}a$

এখন পূর্বোক্ত তিনটি যুগ্ম বল একটি যুগ্মবলের সমান এবং ইহার ভ্রামক $=$ ঐ তিনটি যুগ্মবলের ভ্রামকের সমষ্টি $= P.\frac{1}{3}a + P.\frac{1}{3}a + P.\frac{1}{3}a = P.a.$

***15-7. একটি বস্তুতে প্রযুক্ত তিনটি বলের মান, দিক্ ও ক্রিয়ারেখা যদি কোন ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহু দ্বারা নির্দেশ করা যায় তাহা হইলে বল তিনটি একটি যুগ্মবলের সমান। এই যুগ্মবলের ভ্রামক ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।**



মনে কর, একটি বস্তুতে প্রযুক্ত P, Q এবং R বলের মান, দিক্ ও ক্রিয়ারেখা ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত BC, CA এবং AB বাহুর দ্বারা নির্দিষ্ট হইয়াছে।

B-বিন্দুর ভিতর দিয়া CA বাহুর সমান্তরাল DBE রেখা অঙ্কিত কর। B বিন্দুতে BD এবং BE অভিমুখে দুইটি বল Q প্রয়োগ কর ; বস্তুর উপর ইহাদের কোন ক্রিয়া নাই।

এখন, B বিন্দুতে ক্রিয়মাণ BC-র দিকে P, BD-র দিকে Q এবং AB-র দিকে R এই তিনটি বলের মান ও দিক্ ABC ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত BC, CA এবং AB বাহুর দ্বারা প্রদর্শিত হইতে পারে। অতএব বলের ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে ইহারা সাম্যাবস্থায় আছে। অবশিষ্ট দুইটি সমান ও অসদৃশ সমান্তরাল বল BE বরাবর Q এবং CA বরাবর Q একটি যুগ্মবল গঠিত করে।

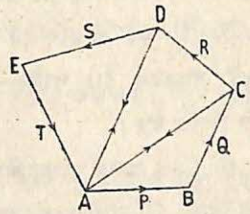
এই যুগ্মবলের ভ্রামক $= Q \times BN = CA \times BN$

$=$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

অনুসিদ্ধান্ত : কোন বস্তুতে প্রযুক্ত বলসমূহের মান, দিক্ ও ক্রিয়ারেখা যদি কোন বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুসমূহের দ্বারা নির্দেশ করা যায়

তাহা হইলে বলসমূহ একটি যুগ্মবলের সমান। এই যুগ্মবলের ভ্রামক বহুভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

মনে কর, একটি বস্তুতে প্রযুক্ত F, Q, R, S এবং T বলের মান, দিক্ এবং ক্রিয়ারেখা ABCDE বহুভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত AB, BC, CD, DE এবং EA বাহুর দ্বারা নির্দিষ্ট হইয়াছে।



AC এবং AD যুক্ত কর।

AC ও CA-এর দ্বারা নির্দিষ্ট দুইটি সমান বিপরীতমুখী বল (মনে কর, প্রত্যেকে F_1), এবং AD ও DA রেখার দ্বারা নির্দিষ্ট দুইটি সমান বিপরীতমুখী বল (মনে কর, প্রত্যেকে F_2) প্রয়োগ কর। বস্তুর উপর ইহাদের কোন ক্রিয়া নাই।

AB, BC এবং CA রেখার দ্বারা নির্দিষ্ট বল তিনটি একটি যুগ্মবলের সমান এবং ইহার ভ্রামক ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

অনুরূপে ACD এবং ADE ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলির দ্বারা নির্দিষ্ট বলসমূহ দুইটি যুগ্মবলের সমান ; ইহাদের ভ্রামক যথাক্রমে ACD এবং ADE ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

এই তিনটি যুগ্মবল একটি যুগ্মবলের সমান এবং ইহার ভ্রামক = উক্ত তিনটি ভ্রামকের যোগফল $= 2\,(\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE)$

= সমগ্র ABCDE বহুভুজের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।

প্রশ্নমালা 14

1 ABCD একটি বর্গক্ষেত্র, ইহার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 5 ফুট। AB এবং CD বাহু বরাবর 4 পাউণ্ড-ভার দুইটি বল এবং AD ও CB বরাবর 6 পাউণ্ড-ভার দুইটি বল ক্রিয়া করে। যে যুগ্মবল ইহাদিগকে সাম্যাবস্থায় রাখিতে পারে তাহার ভ্রামক নির্ণয় কর।

2. 6, 8, 6 পাউণ্ড-ভার বল একটি আয়তক্ষেত্রের AB, CB এবং CD বাহু বরাবর ক্রিয়া করে ; AB এবং BC বাহু 3 এবং 4 ফুট দীর্ঘ। আর একটি 8 পাউণ্ড-ভার বল কিরূপে ক্রিয়া করিলে চারিটি বল সাম্যাবস্থায় থাকিবে ?

3. 1, 2, 3, 4 এবং $2\sqrt{2}$ মানের বল একটি বর্গক্ষেত্রের AB, BC, CD, DA বাহু বরাবর এবং AC কর্ণ বরাবর প্রয়োগ করা হইয়াছে। দেখাও যে এই বলসমূহ একটি যুগ্মবলের সমান এবং এই যুগ্মবলের ভ্রামক নির্ণয় কর।

4. 3, 5, 3, 5 পাউণ্ড-ভারের বল ABCD রম্বসের AB, BC, CD এবং DA বাহু বরাবর প্রযুক্ত হইয়াছে। রম্বসের প্রত্যেক বাহু 5 ফুট দীর্ঘ এবং A কোণ 60°। লব্ধি যুগ্মবলের ভ্রামক নির্ণয় কর।

5. 2 ফুট বাহুবিশিষ্ট একটি যুগ্মবলের প্রত্যেকের মান 6 পাউণ্ড-ভার ; একই সমতলে 10 পাউণ্ড-ভারের একটি বল ক্রিয়া করিতেছে। ইহাদের লব্ধি নির্ণয় কর।

6. AB একটি অনুভূমিকভাবে রক্ষিত ভারহীন দণ্ড, ইহার A বিন্দুতে উল্লম্ব ঊর্ধ্ব দিকে 2 পাউণ্ড-ভারের এবং B বিন্দুতে উল্লম্ব নিম্নদিকে 2 পাউণ্ড-ভারের বল প্রযুক্ত হইয়াছে। দণ্ডের সঙ্গে 30° কোণ করিয়া 8 পাউণ্ড-ভারের একটি বল এক প্রান্ত বিন্দু C-তে নিম্নদিকে প্রযুক্ত করিয়াছে। দণ্ডের কোন বিন্দুতে কি বল কোন্ দিকে প্রযুক্ত হইলে এই বলগুলি সাম্যাবস্থায় থাকিবে ?

7. 1, 2, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ অনুপাতের বল একটি বর্গক্ষেত্রের AB, BC, CD বাহু বরাবর এবং DB, BA কর্ণ বরাবর প্রযুক্ত হইয়াছে। দেখাও যে ইহারা একটি যুগ্মবলের সমান এবং এই যুগ্মবলের ভ্রামক নির্ণয় কর।

8. P এবং Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল। ইহাদের সমতলে একটি যুগ্মবল যাহার প্রত্যেক বল F এবং বাহু a ক্রিয়া করিতেছে। দেখাও যে ইহাদের সম্মিলিত ক্রিয়ার ফলে লব্ধির ক্রিয়া রেখা $\frac{Fa}{P+Q}$ পরিমাণ দূরে সরিয়া যাইবে।

9. G ভ্রামকের একটি যুগ্মকের গঠনকারী বলদ্বয় A এবং B বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যদি তাহাদের ক্রিয়ারেখাকে এক সমকোণ পরিমাণ ঘুরান হয় তাহা হইলে তাহারা H ভ্রামকের যুগ্মক করে। দেখাও যে, যখন উভয় বল AB-র সহিত সমকোণে ক্রিয়া করে, তখন তাহারা $\sqrt{G^2+H^2}$ ভ্রামকের যুগ্মকে পরিণত হয়।

সঙ্কেত : $G = F.AB \sin\theta$, $H = F.AB \cos\theta$,

তৃতীয় ক্ষেত্রে ভ্রামক $= F.AB$

এখন $\sqrt{G^2+H^2} = F\,AB$,

(ধরা হইয়াছে, প্রথমে F বল AB-র সহিত θ কোণ করিয়া আছে।)

ষোড়শ পরিচ্ছেদ

তিনটি বলের সাম্যাবস্থা
Equilibrium of three Forces

16-1. এই পরিচ্ছেদে আমরা তিনটি বলের ক্রিয়ার জন্য বস্তুর সাম্যাবস্থার সহজ প্রশ্নের আলোচনা করিব।

সূত্র। যদি একটি বস্তুর উপর তিনটি বল প্রযুক্ত হইয়া বস্তুটি সাম্যাবস্থায় থাকে, তাহা হইলে হয় তিনটি বল একবিন্দুতে ছেদ করে, নতুবা তাহারা সমান্তরাল।

দুইটি বল যদি সমান্তরাল না হয় তাহা হইলে তাহারা একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। বল তিনটি সাম্যাবস্থায় আছে বলিয়া এই দুই বলের লব্ধি, তৃতীয় বলের সমান ও বিপরীতমুখী হইতে হইবে। তাহা হইলে একই সরল রেখায় বিপরীতদিকে ক্রিয়া করিতেছে বলিয়া তৃতীয় বল প্রথম দুইটির ছেদবিন্দুর ভিতর দিয়া যাইতে হইবে।

দুইটি বল যদি সমান্তরাল (সদৃশ বা অসদৃশ) হয়, তাহাদের লব্ধি তৃতীয় বলের সমান ও বিপরীতমুখী। কিন্তু লব্ধি প্রথম দুই বলের সমান্তরাল। অতএব তৃতীয় বল প্রথম দুই বলের সমান্তরাল।

[এখানে দুইটি সমান্তরাল বল যুগ্মবল (couple) হইতে পারে না ; কারণ, যুগ্মবল এবং একটি তৃতীয় বল সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে না।]

16-2. একটি ভারী বস্তুর দুই বিন্দুতে প্রযুক্ত দুইটি অসমান্তরাল বলের ক্রিয়ার ফলে বস্তুটি সাম্যাবস্থায় থাকিলে তাহার ভার এবং অপর বল দুইটি এক বিন্দুর ভিতর দিয়া যাইবে। এই ক্ষেত্রে এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ তিনটি বলের সাম্যাবস্থার প্রশ্ন সমাধান করিতে হয়। তিনটি বলের সাম্যাবস্থার প্রশ্ন সমাধানে নিম্নলিখিত যে-কোন পদ্ধতি ব্যবহৃত হইতে পারে :

(1) নৈথিক পদ্ধতি (বলের ত্রিভুজ-সূত্রের বিপরীত প্রতিজ্ঞা) ;

(2) লামির সূত্র ;

(3) দুই পরস্পর লম্বাভিমুখে বিশ্লেষণ-পদ্ধতি ;

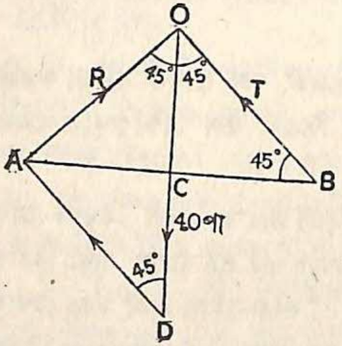
এবং (4) কোন বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক গ্রহণের পদ্ধতি।

16-3. **উদাহরণ :**

1. একটি সমদণ্ড AB-র ভার 40 পাউণ্ড। A বিন্দু স্থির এবং ইহার চারিদিকে দণ্ডটি ঘুরিতে পারে। B প্রান্তে দণ্ডের সহিত 45° কোণে একটি দড়ির

সাহায্যে দণ্ডটিকে অনুভূমিক ভাবে রাখা হইয়াছে। দড়ির টান এবং A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

দণ্ডের উপর নিম্নলিখিত তিনটি বল ক্রিয়া করিতেছে—



(1) দণ্ডের মধ্যবিন্দু C-তে দণ্ডের ভার 40 পাউণ্ড ;

(2) B বিন্দুতে দড়ির টান T ;

(3) A বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া R।

এই তিনটি বল এক বিন্দুর ভিতর দিয়া যাইবে। C-বিন্দুর ভিতর দিয়া উল্লম্বরেখা এবং দড়ি যেন O-বিন্দুতে ছেদ করিল, তাহা হইলে R বল AO বরাবর ক্রিয়া করে।

BO রেখার সমান্তরাল AD রেখা অঙ্কিত কর। ইহা বর্ধিত OC-কে D-বিন্দুতে ছেদ করিল।

এখন O বিন্দুতে ক্রিয়মাণ T, R এবং ভার 40 পা., এই তিনটি বল যথাক্রমে DAO ত্রিভুজের DA, AO এবং OD বাহুর সমান্তরাল।

বলের ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত প্রতিজ্ঞা অনুসারে ঐ বলগুলি যথাক্রমে DA, AO এবং OD বাহুর দ্বারা প্রদর্শিত হয়।

সুতরাং $\dfrac{T}{DA}=\dfrac{R}{AO}=\dfrac{40}{OD}$

$\therefore \quad T=40.\dfrac{DA}{OD}=40\cos 45°=40\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=20\sqrt{2}$ পা. ভার

$R=40.\dfrac{AO}{OD}=40\sin 45°=40\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=20\sqrt{2}$ পা. ভার।

দ্রষ্টব্য : লামির সূত্র ব্যবহার করিয়াও এই প্রশ্ন সমাধান করা যায়। তখন, $\dfrac{T}{\sin 135°}=\dfrac{R}{\sin 135°}=\dfrac{40}{\sin 90°}$ হইতে ফল পাওয়া যাইবে।

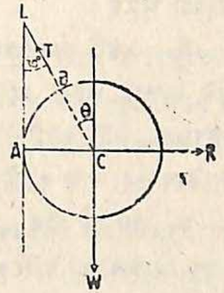
2. একটি সূতার এক প্রান্ত একটি ভারী গোলকের এক বিন্দুতে এবং অপর প্রান্ত একটি মসৃণ উল্লম্ব দেওয়ালের সঙ্গে বাঁধা হইয়াছে। সূতার দৈর্ঘ্য গোলকের ব্যাসার্ধের সমান ; গোলকটি দেওয়াল স্পর্শ করিয়া আছে। দড়ির টান এবং দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

গোলকের উপর নিম্নলিখিত বল তিনটি ক্রিয়া করিতেছে

(1) গোলকের কেন্দ্র C-তে তাহার ভার W উল্লম্বভাবে,

(2) A বিন্দুতে মসৃণ দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া R, দেওয়াল এবং গোলকের সাধারণ অভিলম্বের দিকে অর্থাৎ AC-র দিকে,

(3) B-বিন্দুতে দড়ির টান T



প্রথম দুই বল C-বিন্দুতে ছেদ করে, অতএব T বলও C-বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়।

এখন, $\sin ALC = \frac{AC}{LC} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$ $\therefore$ $\angle ALC = 30°$

উল্লম্ব এবং অনুভূমিক দিকে বিশ্লেষণ করিয়া

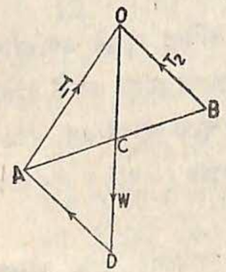
$T \cos \theta = W$ $\therefore$ $T = \frac{W}{\cos \theta} = \frac{W}{\cos 30°} = \frac{2W}{\sqrt{3}}$

$R = T \sin \theta = \frac{2W}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{W}{\sqrt{3}}$

প্রশ্নমালা 15

1. একটি স্থির বিন্দুতে সংলগ্ন দুইটি দড়ি একটি সমদণ্ডের দুই প্রান্তে বাঁধিয়া দণ্ডটিকে ঝুলান হইয়াছে। দেখাও যে দড়ি দুইটির টান তাহাদের দৈর্ঘ্যের অনুপাতে।

[সংকেত : O-বিন্দু হইতে OA এবং OB দড়ির সাহায্যে AB দণ্ড ঝুলান হইয়াছে। OC রেখা উল্লম্ব হইবে।



AD রেখা OB-র সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত হইয়াছে। এখন △DAO একটি বলত্রিভুজ। DA, AO, OD যথাক্রমে T_2, T_1 এবং W-এর অনুপাতে। জ্যামিতির সাহায্যে দেখাও যে DA এবং BO সমান।]

2. একটি সমদণ্ড তাহার এক স্থির প্রান্তের চারিদিকে ঘুরিতে পারে। দণ্ডের অপর প্রান্তে ইহার ভারের অর্ধেকের সমান বল অনুভূমিক দিকে প্রয়োগ করিয়া ইহাকে উল্লম্ব অবস্থান হইতে টানিয়া

রাখা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে দণ্ডটি উল্লম্ব দিকের সহিত 45° কোণ করিয়া আছে।

3. একটি সমদণ্ডের দৈর্ঘ্য 20 ইঞ্চি এবং ভার 25 পাউণ্ড। ইহাকে দুই প্রান্তে দুইটি দড়ি বাঁধিয়া উপরে একটি পেরেক হইতে ঝুলাইয়া রাখা হইয়াছে ; দড়ি দুইটির দৈর্ঘ্য 16 এবং 12 ইঞ্চি হইলে ইহা কি রকম অবস্থানে থাকিবে এবং দড়ি দুইটির টান কত হইবে?

4. 10 ফুট দীর্ঘ এবং 80 পাউণ্ড ভরের একটি সমদণ্ড A বিন্দুতে একটি মসৃণ অক্ষের চারিদিকে ঘুরিতে পারে। B বিন্দুতে অনুভূমিক দিকে কি বল প্রযুক্ত হইলে দণ্ডটি এমন অবস্থানে থাকিবে যেন ইহার কেন্দ্র A-বিন্দু যে অনুভূমিক তলে আছে তাহার 4 ফুট নীচে থাকে?

5. একটি গোলক একই অনুভূমিক তলে অবস্থিত দুইটি সমান্তরাল দণ্ডের উপর রক্ষিত হইয়াছে ; দণ্ড দুইটির মধ্যে ব্যবধান গোলকের ব্যাসার্ধের সমান। প্রত্যেক দণ্ডের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

6. 20 পাউণ্ড-ভারের একটি ছবি একটি দড়ির সাহায্যে ঝুলান হইয়াছে এবং ইহার উপরের ও নীচের কিনারা অনুভূমিক ভাবে আছে। দড়ির দুই প্রান্ত উপরের দুই কোণে বাঁধা হইয়াছে এবং দড়িটি পেরেকের উপর দিয়া গিয়াছে। পেরেকের দুইদিকের দড়ি পরস্পরের সহিত 120° কোণ করিয়া থাকিলে দড়ির টান নির্ণয় কর।

7. একটি ছবির দুইটি আংটিতে একটি দড়ি বাঁধা হইয়াছে। দড়িটি একটি পেরেকের উপর দিয়া গিয়াছে এবং ছবিটি প্রতিসম অবস্থায় ঝুলিতেছে। দড়ির দৈর্ঘ্য 18 ইঞ্চি, পেরেকটি আংটি দুইটির যোজক অনুভূমিক রেখা হইতে 6 ইঞ্চি উপরে আছে। ছবির ভার 16 পাউণ্ড হইলে দড়ির টান কত?

8. তিন ফুট দীর্ঘ একটি ভারহীন অনুভূমিকভাবে রক্ষিত দণ্ডের এক প্রান্ত একটি উল্লম্ব দেওয়ালে একটি কব্জার সহিত আটকানো, অপর প্রান্ত একটি দড়ির সাহায্যে কব্জার 4 ফুট উপরে দেওয়ালের একটি বিন্দুতে আবদ্ধ এবং দণ্ডের দড়িবাঁধা প্রান্ত হইতে 180 পাউণ্ড-ভার ঝুলানো হইয়াছে। দড়ির টান এবং দণ্ডের দিকে চাপ নির্ণয় কর।

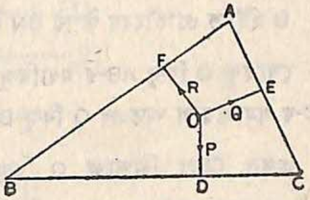
9. W ভারের একটি গোলক দুইটি মসৃণ সমতলের মধ্যে রক্ষিত হইয়াছে। একটি তল উল্লম্ব এবং অপর তল উল্লম্বের সঙ্গে α-কোণ করিয়া আছে। তল দুইটির প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

10. দেখাও যে একটি ভারী দণ্ড তাহার প্রান্তদ্বয় অনুভূমিক মসৃণ সমতলে এবং অনুভূমিক তলের সহিত যে-কোন নতিতে অবস্থিত একটি মসৃণ সমতলে ঠেস দিয়া সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে না।

উঃ—মসৃণ সমতল দুইটির প্রতিক্রিয়া লম্বাভিমুখী ; ইহারা যেই বিন্দুতে ছেদ করে তৃতীয় বল দণ্ডের ভার যাহা উল্লম্ব দিকে ক্রিয়মাণ, ঐ বিন্দুর ভিতর দিয়া যাওয়া অসম্ভব। কারণ, অনুভূমিক তলের প্রতিক্রিয়া এবং দণ্ডের ভার সমান্তরাল বলিয়া তাহারা পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে না।

11. সাম্যাবস্থায় তিনটি বল ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বাভিমুখে ক্রিয়া করে (সকলেই অন্তর্মুখী অথবা সকলেই বহির্মুখী)। দেখাও যে বাহুগুলি sin A, sin B এবং sin C-এর অনুপাতে।

সমাধান : ধর, P, Q এবং R এই তিনটি বল BC, CA এবং AB-র লম্বভাবে ক্রিয়া করিয়া সাম্যাবস্থায় আছে।



যদি P এবং Q বলদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে তৃতীয় বল R এই O বিন্দুগামী।

এখন, ল্যামির সূত্র প্রয়োগ করিয়া

$$\frac{P}{\sin EOF}=\frac{Q}{\sin FOD}=\frac{R}{\sin DOE}$$

$$\therefore \quad \frac{P}{\sin(180^\circ-A)}=\frac{Q}{\sin(180^\circ-B)}=\frac{R}{\sin(180^\circ-C)}$$

$$\therefore \quad \frac{P}{\sin A}=\frac{Q}{\sin B}=\frac{R}{\sin C}.$$

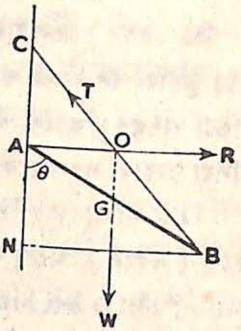
12. P, Q, R তিনটি বল যথাক্রমে একটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু A, B এবং C-তে প্রত্যেক বিপরীত বাহুর লম্ব অভিমুখে ক্রিয়া করিয়া সাম্যাবস্থায় আছে। প্রমাণ কর যে $P : Q : R = a : b : c$.

13. একটি a দৈর্ঘ্যের ভারী সমদণ্ডের একপ্রান্ত উল্লম্ব মসৃণ দেওয়ালে ঠেকান আছে এবং অপর প্রান্ত একটি b দৈর্ঘ্যের সূতায় সাহায্যে প্রাচীরের একটি বিন্দুতে বাঁধা আছে যদি সাম্যাবস্থায় দণ্ডটি প্রাচীরের সহিত θ কোণ করিয়া থাকে তাহা হইলে প্রমাণ কর যে $\cos^2\theta=\frac{b^2-a^2}{3a^2}$.

সমাধান :

মনে কর, AB দণ্ড, CN প্রাচীর এবং BC সূতা।

এখানে দণ্ডটির উপর তিনটি বল ক্রিয়া করিতেছে।



(1) দণ্ডের ভার W ইহার মধ্যবিন্দু G-তে উল্লম্বভাবে ক্রিয়মাণ

(2) মসৃণ উল্লম্ব প্রাচীরের প্রতিক্রিয়া R অনুভূমিক ভাবে ক্রিয়মাণ

(3) দড়ির টান

প্রথম দুই বলের ক্রিয়া রেখা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। অতএব দড়িটি O বিন্দুর ভিতর দিয়া গিয়াছে।

B হইতে প্রাচীরের উপর BN লম্ব টানা হইল।

যেহেতু G বিন্দু AB-র মধ্যবিন্দু এবং GO সরলরেখা BAC ত্রিভুজের ভূমি AC-র সমান্তরাল অতএব O বিন্দু BC-র মধ্যবিন্দু।

এখন CBN ত্রিভুজে O বিন্দু BC-বাহুর মধ্যবিন্দু এবং OA সরলরেখা ভূমি BN-এর সমান্তরাল, অতএব A বিন্দু CN বাহুর মধ্যবিন্দু।

$$BN = a \sin\theta$$

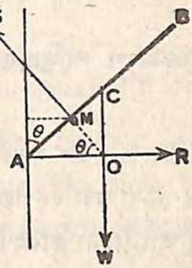
$$AN = a\cos\theta = AC$$

এখন, $BC^2 = BN^2 + NC^2$

$$\therefore\ l^2 = (a\sin\theta)^2 + (2a\cos\theta)^2$$
$$= a^2\sin^2\theta + 4a^2\cos^2\theta$$
$$= a^2(1-\cos^2\theta) + 4a^2\cos^2\theta$$
$$= a^2 + 3a^2\cos^2\theta$$

$\therefore\ l^2 - a^2 = 3a^2\cos^2\theta$ অর্থাৎ $\cos^2\theta = \dfrac{l^2 - a^2}{3a^2}$.

14. $2a$ দৈর্ঘ্যের একটি ভারী সমদণ্ডের একপ্রান্ত উল্লম্ব মসৃণ প্রাচীরে ঠেকান আছে এবং উহা প্রাচীর হইতে b দূরত্বে প্রাচীরের সমান্তরাল একটি মসৃণ দণ্ডের উপর রক্ষিত হইয়া সাম্যাবস্থায় আছে। দেখাও যে, উল্লম্বের সঙ্গে দণ্ডের নতি $\sin^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$.



সমাধান : মনে কর, AB দণ্ডের A বিন্দু প্রাচীরে ঠেকান আছে এবং ইহার M বিন্দু প্রাচীর হইতে b দূরত্বে প্রাচীরের সমান্তরাল-ভাবে অবস্থিত দণ্ডটিকে স্পর্শ করিয়া আছে।

দণ্ডের ভার তাহার মধ্যবিন্দু C বিন্দুর ভিতর দিয়া উল্লম্বভাবে ক্রিয়মাণ। ইহা মসৃণ প্রাচীরের প্রতিক্রিয়া অনুভূমিক বল R-এর সহিত O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। অতএব দণ্ডের উপর ক্রিয়মাণ তৃতীয় বল S যাহা AB-র লম্বভাবে অবস্থিত, O বিন্দুগামী।

A বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া $S.AM - W.AO = 0$

অথবা $S.b \operatorname{cosec} \theta - W.a \sin \theta = 0$ ....(1)

উল্লম্বদিকে বিশ্লেষণ করিয়া $S \sin \theta = W$ ....(2)

(1) এবং (2) হইতে $\dfrac{Wb}{\sin^2\theta} = Wa \sin \theta$

$\therefore \quad \sin^3\theta = \dfrac{b}{a}$ অথবা $\sin \theta = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$

অর্থাৎ $\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$.

15. একটি ভারী সমদণ্ড AB, A বিন্দুতে এক মসৃণ প্রাচীরে ঠেস দিয়া আছে এবং ইহাকে একটি দড়ি BC-র সাহায্যে বাঁধিয়া সাম্যাবস্থায় রাখা হইয়াছে; C বিন্দু A বিন্দুর উল্লম্ব উপরে। যদি $AB = \sqrt{2}AC$ হয় তাহা হইলে উল্লম্বের সহিত দণ্ডের নতি নির্ণয় কর। দেওয়ালের প্রতিক্রিয়া নির্ণয় কর।

[উ. মা. 1963]

সংকেত : 13 প্রশ্নের মত অঙ্কন, এখানে $\cos \theta = \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \quad \theta = 45^\circ$

এখন $BN = AN = \frac{1}{2}CN$; ধর, $\angle NBC = \phi$

$\tan \phi = \dfrac{CN}{BN} = \dfrac{2BN}{BN} = 2.$

ল্যামির সূত্র হইতে $\dfrac{R}{\sin(90^\circ + \phi)} = \dfrac{W}{\sin(180^\circ - \phi)}$

$\therefore \quad R = W \cot \phi = \frac{1}{2}W.$

সপ্তদশ পরিচ্ছেদ | ভারকেন্দ্র
Centre of Gravity

17-1. এক সমতলে সমান্তরাল বলসমূহের লব্ধি নির্ণয়ের প্রণালী ইতিপূর্বে আলোচনা করা হইয়াছে। এই পরিচ্ছেদে সাধারণভাবে সমান্তরাল বল সম্বন্ধীয় সূত্র আলোচনা করিব।

17-2. একটি বস্তুর বিভিন্ন বিন্দুতে প্রযুক্ত সমান্তরাল বলসমূহের লব্ধি নির্ণয় (সকল বল এক সমতলে না-ও হইতে পারে)

মনে কর, P, Q, R, S সমান্তরাল বল A, B, C, D, বিন্দুতে প্রযুক্ত হইয়াছে।

AB যুক্ত কর, AB-তে এমন একটি বিন্দু E লও যেন

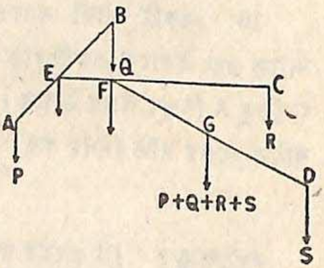
$$P\,AE = Q.EB$$

এখন P এবং Q-এর লব্ধি তাহাদের সমান্তরাল P+Q বল E বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

EC যোগ করিয়া তাহার উপর F বিন্দু লও যেন

$$(P+Q)\times EF = R\times FC$$

তাহা হইলে E-বিন্দুতে P+Q এবং C-বিন্দুতে R বলের লব্ধি তাহাদের সমান্তরাল P+Q+R বল F-বিন্দুতে ক্রিয়া করে।



সুতরাং ইহা A, B এবং C বিন্দুতে প্রযুক্ত P, Q এবং R বলের লব্ধি।

এইবার FD যুক্ত কর এবং তাহার উপর G বিন্দু লও, যেন

$$(P+Q+R).\,FG = S\times DG$$

তাহা হইলে F বিন্দুতে P+Q+R এবং D বিন্দুতে S বলের লব্ধি তাহাদের সমান্তরাল P+Q+R+S বল G বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

ইহা A, B, C, D বিন্দুতে প্রযুক্ত P, Q, R, S বলের লব্ধি।

এইরূপে অগ্রসর হইয়া বিভিন্ন বিন্দুতে প্রযুক্ত যে-কোন সংখ্যক সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় করা যায়।

A, B, C, D বিন্দুতে প্রযুক্ত সমান্তরাল বল P, Q, R, S-এর মান ঠিক রাখিয়া দিক্ পরিবর্তন করিলে তখনও তাহাদের লব্ধি পূর্বের মত G বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়।

17-3. সমান্তরাল বলশ্রেণীর কেন্দ্র (Centre of Parallel Forces)

সংজ্ঞা। সমান্তরাল বলশ্রেণীর লব্ধি যে বিন্দুর ভিতর দিয়া যায়, তাহার অবস্থান বলসমূহের মানের উপর এবং প্রয়োগ বিন্দুর উপর নির্ভর করে, তাহাদের দিকের উপর নির্ভর করে না। এই বিন্দুকে **সমান্তরাল বলশ্রেণীর কেন্দ্র বলে।**

17-4. সমান্তরাল বলসমূহ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর যোজক সরলরেখার সমান্তরাল না হইলে লব্ধি উভয় বিন্দুর ভিতর দিয়া যাইতে পারে না। অতএব সমান্তরাল বলসমূহের একাধিক কেন্দ্র থাকিতে পারে না।

17-5. **এক সরলরেখাস্থ বিন্দুসমূহে প্রযুক্ত সমান্তরাল বলশ্রেণীর কেন্দ্র।**

যদি এক সরলরেখাস্থ $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ বিন্দুসমূহে $P_1, P_2, P_3, \cdots P_n$ সমান্তরাল বলসমূহ প্রযুক্ত হয় তাহা হইলে সমান্তরাল বলসমূহের লব্ধি নির্ণয়ের অঙ্কন-প্রণালী (17-2 অনুচ্ছেদ) হইতে দেখা যায় যে ইহাদের কেন্দ্র এই সরলরেখার উপর থাকে। কেন্দ্রের অবস্থান বলসমূহের দিকের উপর নির্ভর করে না বলিয়া বলসমূহ লম্বভাবে প্রযুক্ত মনে করিতে পারি। যদি রেখাস্থ একটি নির্দিষ্ট O বিন্দু হইতে $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$-এর দূরত্ব $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ হয় এবং কেন্দ্রের দূরত্ব $\bar{x}$ হয় তাহা হইলে O বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$(P_1+P_2+P_3+\cdots+P_n)\bar{x}=P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3+\cdots+P_nx_n.$$

$$\therefore \quad \bar{x}=\frac{P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3+\quad+P_nx_n}{P_1+P_2+P_3+\cdots+P_n}$$

17-6. **ভারকেন্দ্র** (Centre of Gravity)। পৃথিবী প্রত্যেক বস্তুকণাকে তাহার কেন্দ্রের দিকে আকর্ষণ করে। পৃথিবী কোন বস্তুকে যে-বল দিয়া আকর্ষণ করে তাহা ঐ বস্তুর ভার। একটি বস্তুকে কতকগুলি কণার সমষ্টি বলা যায়। যেহেতু পৃথিবীর কেন্দ্র বহু দূরে, এই কণাসমূহের উপর বল অর্থাৎ তাহাদের ভারসমূহ সমান্তরাল ধরা যায়। সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় প্রণালী অবলম্বন করিয়া এই বলসমূহের লব্ধি নির্ণয় করিলে, লব্ধি যে বিন্দুতে ক্রিয়া করে তাহা বস্তুর ভারকেন্দ্র।

সংজ্ঞা। ভারকেন্দ্র : যে বিন্দুর ভিতর দিয়া কোন বস্তুর ভার সর্বদাই ক্রিয়া করে তাহাকে ঐ বস্তুর ভারকেন্দ্র বলে।

17-7. **কোন বস্তুর একাধিক ভারকেন্দ্র থাকিতে পারে না।** যদি সম্ভব হয়, মনে কর, G এবং H বস্তুর দুইটি ভারকেন্দ্র। তাহা হইলে বস্তুর ভার G-বিন্দুর ভিতর দিয়া এবং H-বিন্দুর ভিতর দিয়া যাইবে। অতএব ইহা GH-রেখা বরাবর ক্রিয়া করিবে। বস্তুটিকে ঘুরাইয়া GH রেখাকে অনুভূমিক কর। বস্তুর ভার উল্লম্ব দিকে ক্রিয়া করে সুতরাং ইহার ক্রিয়া-রেখা GH বরাবর হইতে পারে না। অতএব বস্তুর একাধিক ভারকেন্দ্র থাকিতে পারে না।

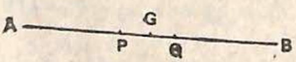
17-8. **ভরকেন্দ্র** (Centre of Mass) : কোন বস্তুর কণাসমূহের উপর তাহাদের ভরের অনুপাতে সমান্তরাল বল প্রযুক্ত হইলে এই সকল বলের কেন্দ্রকে **ভরকেন্দ্র** বলা হয়।

কোন কণার উপর পৃথিবীর আকর্ষণ বল বা উক্ত কণার ভার তাহার ভরের অনুপাতে। বস্তুর কণাসমূহের ভার সমান্তরাল। সুতরাং বস্তুর ভারকেন্দ্র ও ভরকেন্দ্র একই বিন্দু। পৃথিবীর আকর্ষণ বল যদি না থাকে তাহা হইলে ভার·কেন্দ্র থাকিতে পারে না কিন্তু ভরকেন্দ্র সর্বদাই আছে।

আবার বস্তু যদি এমন বড় হয় যে তাহার কণাসমূহের ভার সমান্তরাল বলিয়া ধরা যায় না, তাহা হইলে বস্তুর কোন ভারকেন্দ্র আছে বলা যায় না।

17-9 সমদণ্ডের ভারকেন্দ্র

মনে কর, AB একটি সমদণ্ড এবং G ইহার মধ্যবিন্দু। G-এর উভয় দিকে সমদূরে AB-র উপর দুইটি বিন্দু P এবং Q লও।

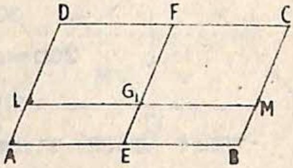


P এবং Q-তে সমান বস্তুকণার ভারকেন্দ্র G (কারণ, দুইটি সমান সমান্তরাল বলের লব্ধি মধ্যবিন্দু)। দণ্ডটিকে এইরূপ সমদূরবর্তী কণা-যুগলের সমষ্টিরূপে গ্রহণ করা যায় অর্থাৎ GA অংশে যে-কোন কণা লইলে GB অংশে সমান দূরে একটি কণা আছে। সুতরাং G-বিন্দু দণ্ডের ভারকেন্দ্র।

17-10. সামান্তরিক পাতের ভারকেন্দ্র

ABCD সামান্তরিকের AB বাহুর মধ্যবিন্দু E এবং CD বাহুর মধ্যবিন্দু F যোগ কর।

সমগ্র পাতটিকে AB বাহুর সমান্তরাল কতকগুলি দণ্ডের সমষ্টি রূপে গ্রহণ করা যায় ; LM এই রকম যে-কোন একটি দণ্ড। ইহার মধ্যবিন্দু G_1 ঐ LM দণ্ডের ভারকেন্দ্র।



আবার LM-এর মধ্যবিন্দু G_1, EF রেখার উপর আছে (কারণ, $LG_1 = AE = EB = MG_1$)। যে-কোন দণ্ডের ভারকেন্দ্র EF-এর উপর আছে বলিয়া সমগ্র পাতের ভারকেন্দ্র EF-এর উপর আছে।

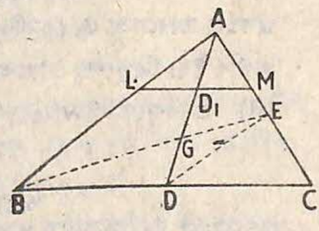
অনুরূপে BC-র সমান্তরাল দণ্ডসমূহের সমষ্টি রূপে পাতটিকে গ্রহণ করিলে ইহার ভারকেন্দ্র BC এবং AD রেখাদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যুক্ত করিয়া যে রেখা তাহার উপর আছে।

সুতরাং ভারকেন্দ্র এই দুই রেখার ছেদ-বিন্দু।

17-11 ত্রিকোণ-পাতের ভারকেন্দ্র

ABC একটি ত্রিকোণ-পাত। D-বিন্দু BC বাহুর মধ্যবিন্দু ; AD যুক্ত কর। পাতটিকে BC-এর সমান্তরাল কতকগুলি দণ্ড রূপে গ্রহণ করা যায় ; LM এইরূপ একটি দণ্ড। AD রেখা এই দণ্ডকে D_1 বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে

$$\frac{LD_1}{BD} = \frac{AD_1}{AD} = \frac{D_1M}{DC}$$



কিন্তু $BD = DC \quad \therefore \quad LD_1 = D_1M$

সুতরাং D_1 বিন্দু LM রেখার মধ্যবিন্দু।

কিন্তু LM-এর ভারকেন্দ্র তাহার মধ্যবিন্দু। অতএব LM-দণ্ডের ভারকেন্দ্র AD রেখার উপর আছে। এইরূপ প্রত্যেক দণ্ডের ভারকেন্দ্র AD রেখার উপর। সুতরাং ABC পাতের ভারকেন্দ্র AD রেখার উপর।

আবার পাতটিকে CA রেখার সমান্তরাল দণ্ডসমূহের সমষ্টি রূপে গ্রহণ করিলে পাতের ভারকেন্দ্র BE মধ্যমার উপর আছে।

অতএব ভারকেন্দ্র AD এবং BE মধ্যমাদ্বয়ের ছেদবিন্দু G.

G-এর অবস্থান জানিবার জন্য DE যোগ কর।

এখন GDE, GAB ত্রিভুজদ্বয়ে

$$\frac{GD}{GA}=\frac{DE}{AB}=\frac{\frac{1}{2}AB}{AB}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad GD=\tfrac{1}{2}GA$$

$$2GD=GA=AD-GD \quad \therefore \quad 3GD=AD$$

অর্থাৎ $GD=\frac{1}{3}AD$

অতএব ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র উহার যে কোন মধ্যমার উপর ভূমি হইতে ঐ মধ্যমার এক-তৃতীয়াংশ দূরে এবং শীর্ষবিন্দু হইতে দুই-তৃতীয়াংশ দূরে।

17-12. (i) ত্রিভুজের তিন শীর্ষে যদি সমান ভারের তিনটি কণা লওয়া হয় তবে এই তিনটি কণার ভারকেন্দ্র এবং ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র এক।

(ii) দেখাও যে ইহা যে-কোন মধ্যমার উপর শীর্ষবিন্দু হইতে ঐ মধ্যমার দ্বি-তৃতীয়াংশ দূরে।

মনে কর, প্রত্যেক কণার ভার W

(i) B এবং C বিন্দুতে অবস্থিত সমান ভার দুইটির লব্ধি 2W, BC বাহুর মধ্যবিন্দু Dতে ক্রিয়া করে।

অতএব তিনটি ভারের ভারকেন্দ্র, D বিন্দুতে 2w ববং A বিন্দুতে W এর ভারকেন্দ্র। সুতরাং ইহা AD মধ্যমার উপর আছে।

অনুরূপে ইহা অপর দুইটি মধ্যমার উপর আছে।

সুতরাং ভারকেন্দ্র G, তিনটি মধ্যমার ছেদবিন্দু।

অর্থাৎ ইহা ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রের সহিত মিলিয়া যায়।

(ii) D-বিন্দুতে 2W এবং A বিন্দুতে W ভারের লব্ধির প্রয়োগ বিন্দু G,

$$\therefore \quad W.AG=2W.GD$$

অর্থাৎ $AG=2GD$

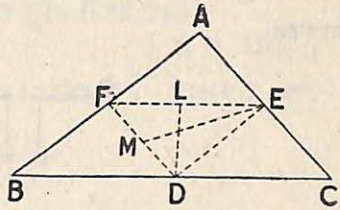
$$AD-GD=2GD$$

$$AD=3GD.$$

$$\therefore \quad GD=\tfrac{1}{3}AD \text{ এবং } AG=\tfrac{2}{3}AD.$$

দ্রষ্টব্য : ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র সম্বন্ধীয় প্রশ্ন সমাধানে W ভারের ত্রিভুজাকার পাতের পরিবর্তে উহার তিন কৌণিক বিন্দুতে $\frac{W}{3}$ ভারের তিনটি কণা গ্রহণ করা যায়।

***17-13. তিনটি সমদণ্ডের দ্বারা গঠিত একটি ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র ঃ**



মনে কর ABC ত্রিভুজ BC, CA, এবং AB একই বেধ বিশিষ্ট এবং এক উপাদানে নির্মিত তিনটি সমদণ্ডের দ্বারা গঠিত। ইহাদের ভার W_1, W_2, W_3 যথাক্রমে মধ্যবিন্দু D, E, এবং F-এ ক্রিয়া করে।

AB এবং AC-র ভারকেন্দ্র EF রেখায় অবস্থিত একটি বিন্দু L

এবং $\frac{EL}{FL}=\frac{W_3}{W_2}=\frac{AB}{AC}=\frac{2ED}{2FD}=\frac{ED}{FD}$

∴ DL রেখা D কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

তিনটি দণ্ডের ভারকেন্দ্র এই রেখার উপর অবশ্যই থাকিবে।

অনুরূপে ভারকেন্দ্র E-কোণের সমদ্বিখণ্ডক EM রেখার উপরও থাকিবে।

∴ ভারকেন্দ্র এই দুই রেখার ছেদবিন্দু। ইহা DEF ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের কেন্দ্র।

17-14. যদি কোন বিন্দু G হইতে বস্তুর যে-কোন একটি বিন্দু যতদূরে, ততদূরে বিপরীত দিকে আর একটি বিন্দু থাকে, তাহা হইলে ঐ G-বিন্দু বস্তুর ভারকেন্দ্র।

(1) বৃত্তাকার বলয়ের ভারকেন্দ্র ঐ বৃত্তের কেন্দ্র।
(2) বৃত্তাকার পাতের ভারকেন্দ্র ঐ বৃত্তের কেন্দ্র
(3) সমবহুভুজের ভারকেন্দ্র ঐ বহুভুজের কেন্দ্র
(4) গোলকের ভারকেন্দ্র উহার কেন্দ্র
(5) একটি স্তম্ভকের (cylinder) ভারকেন্দ্র তাহার অক্ষের মধ্যবিন্দু
(6) একটি ঘনকের (cube) ভারকেন্দ্র উহার দুই কর্ণের ছেদবিন্দু
(7) উপবৃত্তের (ellipse) ভারকেন্দ্র উহার কেন্দ্র।

***17-15. এক সরলরেখায় অবস্থিত কণাসমূহের ভারকেন্দ্র।**

একটি সরলরেখা OX-এর উপর O বিন্দু হইতে x_1, x_2, x_3,........x_n দূরে W_1, W_2, W_3......W_n, ভারের কণাসমূহ অবস্থিত।

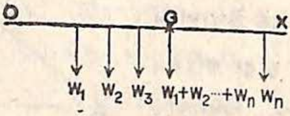
মনে কর, কণাসমূহের ভারকেন্দ্র G এবং O বিন্দু হইতে ইহার দূরত্ব $\bar{x}$।

OX-রেখা যদি অনুভূমিক না হয়, ইহাকে ঘুরাইয়া অনুভূমিক কর, ইহাতে ভারকেন্দ্রের অবস্থানের কোন পরিবর্তন হয় না।

প্রদত্ত ভারসমূহের লব্ধি $=W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots+W_n$.

O-বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লও।

যেহেতু, কোন বিন্দুর চারিদিকে লব্ধির ভ্রামক=উপাংশসমূহের ভ্রামকের যোগফল



$$\therefore\ (W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots+W_n)\bar{x}=W_1x_1+W_2x_2+W_3x_3+\cdots+W_nx_n$$

অর্থাৎ $\bar{x}=\dfrac{W_1x_1+W_2x_2+W_3x_3+\cdots\cdots+W_nx_n}{W_1+W_2+W_3+\cdots+W_n}$

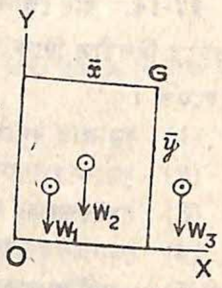
*17-16. এক সমতলে অবস্থিত কণাসমূহের ভারকেন্দ্র।

কণাসমূহের সমতলে দুইটি লম্বাভিমুখী রেখা OX এবং OY লও।

মনে কর, কণাগুলির ভার $W_1, W_2, W_3, \cdots W_n$.

OY রেখা হইতে তাহাদের দূরত্ব যথাক্রমে $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n$ এবং OX রেখা হইতে দূরত্ব $y_1, y_2, y_3\cdots\cdots y_n$

ভারকেন্দ্রের দূরত্ব OY এবং OX হইতে $\bar{x}$ এবং $\bar{y}$ ধরা যাউক।



কণাগুলি যদি অনুভূমিক তলে না থাকে, তাহা হইলে তলটিকে ঘুরাইয়া অনুভূমিক কর। ইহাতে ভারকেন্দ্রের অবস্থানের কোন পরিবর্তন হয় না।

প্রদত্ত ভারসমূহের লব্ধি

$$=W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots+W_n$$

যে-কোন অক্ষের চারিদিকে লব্ধির ভ্রামক=উপাংশসমূহের ভ্রামকের যোগফল। এখন OY অক্ষের চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$(W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots+W_n)\,\bar{x}=W_1x_1+W_2x_2+W_3x_3+\cdots\cdots+W_nx_n$$

$$\therefore\ \bar{x}=\frac{W_1x_1+W_2x_2+W_3x_3+\cdots+W_nx_n}{W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots+W_n}\cdots\text{(1)}$$

অনুরূপে, OX অক্ষের চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$\therefore\ \bar{y}=\frac{W_1y_1+W_2y_2+W_3y_3+\cdots+W_ny_n}{W_1+W_2+W_3+\cdots\cdots+W_n}\cdots\text{(2)}$$

সমীকরণ (1) ও (2) হইতে ভারকেন্দ্রের অবস্থান জানা যায়।

17 17. উদাহরণ ঃ

(1) কোনও প্রদত্ত রেখা হইতে একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দুর দূরত্ব z_1, z_2, z_3 হইলে ঐ রেখা হইতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

[ক. বি. 1947]

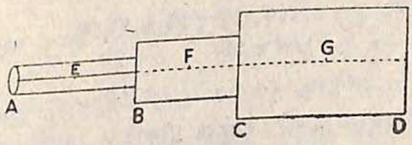
তিনটি শীর্ষবিন্দুতে সমান ভার W লও। ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র এবং ইহাদের ভারকেন্দ্র এক। নির্ণেয় দূরত্ব $\bar{z}$ হইল

$$\bar{z}=\frac{Wz_1+Wz_2+Wz_3}{W+W+W}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

(2) একটি দূরবীণে তিনটি নল আছে; তাহাদের দৈর্ঘ্য 9 ইঞ্চি, 8 ইঞ্চি এবং 7 ইঞ্চি এবং ভার দৈর্ঘ্যের বর্গের অনুপাতে। দূরবীণের দীর্ঘতর প্রান্ত হইতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

(বা. বি. 1947)

দূরবীণের নল তিনটি সম্পূর্ণভাবে টানা আছে ধরা হইয়াছে।



মনে কর, ভারকেন্দ্র তিনটি নলের সাধারণ অক্ষের উপর $\bar{x}$ দূরে

যেহেতু তিনটি নলের ভার দৈর্ঘ্যের বর্গের অনুপাতে

$$\therefore \quad \frac{W_1}{9^2}=\frac{W_2}{8^2}=\frac{W_3}{7^2}=K \text{ (ধরি)}$$

তাহা হইলে $W_1=81K,\ W_2=64K,\ W_3=49K.$

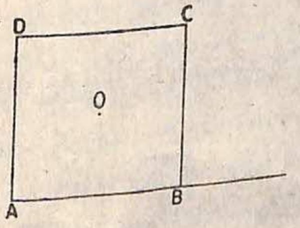
$$\bar{x}=\frac{81K\frac{9}{2}+64K(9+4)+49K(9+8+\frac{7}{2})}{81K+64K+49K}=\frac{\frac{729}{2}+832+\frac{2009}{2}}{194}$$

$=\frac{2201}{194}=11\frac{67}{194}$ ইঞ্চি $=11{\cdot}345$ ইঞ্চি (আসন্ন মান)।

দ্রষ্টব্য ঃ ভারকেন্দ্র নির্ণয়ের সূত্রে ভারসমূহ যাহাদের অনুপাতে সেই মান নিলেই চলে—লক্ষ্য কর K লব এবং হর-এর সাধারণ গুণিতক।

(3) একটি সমবর্গক্ষেত্র ABCD-র ভার 10 পাউণ্ড; ইহার A, B, C, D বিন্দুতে 20, 30, 40, 50 পাউণ্ড ভার চাপান আছে। ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

[ক. বি. 1945]

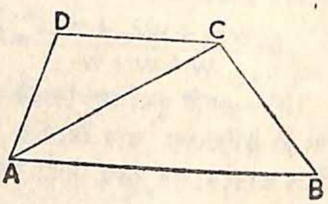


মনে কর, বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a। ভারকেন্দ্রের দূরত্ব AD বাহু হইতে $\bar{x}$ এবং AB বাহু হইতে $\bar{y}$ ধর। বর্গক্ষেত্রের ভার 10 পাউণ্ড তাহার কেন্দ্র O-তে ক্রিয়া করে।

$$\bar{x}=\frac{20\times0+30\times a+40\times a+50\times0+10\times\frac{a}{2}}{20+30+40+50+10}=\frac{75a}{150}=\frac{1}{2}a$$

$$\bar{y}=\frac{20\times0+30\times0+40\times\ +50\times a+10\times\frac{a}{2}}{20+30+40+50+10}=\frac{95a}{150}=\frac{19}{30}a$$

(4) একটি ট্রাপিজিয়ামের দুইটি সমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং b; ইহাদের মধ্যে দূরত্ব h; a-বাহু হইতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

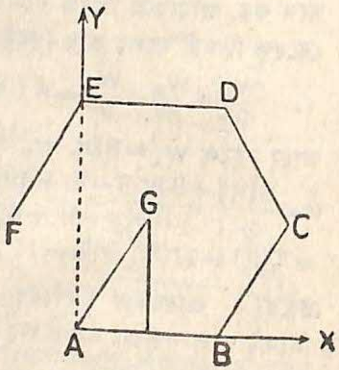


AC যুক্ত কর; ABCD ট্রাপিজিয়াম ABC এবং ADC ত্রিভুজ লইয়া গঠিত। $\triangle ABC=\frac{1}{2}ah$, $\triangle ADC=\frac{1}{2}bh$, a-বাহু হইতে ABC ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র G_1-এর দূরত্ব $\frac{h}{3}$ এবং ADC ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র G_2-এর দূরত্ব $\frac{2}{3}h$.

ট্রাপিজিয়ামের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\bar{y}$ হইলে

$$\bar{y}=\frac{\frac{1}{2}ah\times\frac{h}{3}+\frac{1}{2}bh\times\frac{2}{3}h}{\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh}=\frac{h}{3}\cdot\frac{a+2b}{a+b}$$

(5) $5a$ দৈর্ঘ্যের একটি দণ্ডকে বাঁকাইয়া একটি সমষড়ভুজের পাঁচটি বাহুতে পরিণত করা হইয়াছে। দেখাও যে ইহার প্রান্তদ্বয়ের যে কোনটি হইতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\frac{a}{10}\sqrt{133}$



AB এবং তাহার লম্ব AE-কে অক্ষ লইলাম। ধরা যাউক, ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\bar{x}$ এবং $\bar{y}$

প্রত্যেক বাহুর ভার a অনুপাতে এবং ঐ বাহুর মধ্যবিন্দুতে

$$\bar{x}=\frac{a\frac{a}{2}+a(a+\frac{a}{2}.\cos 60^\circ)+a(a+\frac{a}{2}\cos 60^\circ)+a.\frac{a}{2}+a(-\frac{a}{2}\cos 60^\circ)}{5a}$$

$$=\frac{13}{20}a$$

$$\bar{y}=\frac{a\times0+a\frac{a}{2}\sin 60^\circ+a.\frac{3a}{2}\sin 60^\circ+a.2a\sin 60^\circ+a.\frac{3a}{2}\sin 60^\circ}{5a}$$

$$=\frac{11\sqrt{3}}{20}a.$$

এখন $AG=\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}=\frac{\sqrt{169+363}}{20}a=\frac{\sqrt{532}}{20}a=\frac{a}{10}\sqrt{133}.$

17-18. কোন বস্তুর দুইটি অংশের ভারকেন্দ্র এবং তাহাদের ভার দেওয়া আছে ; বস্তুটির ভারকেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, অংশ দুইটির ভারকেন্দ্র G_1 এবং G_2 ; W_1 এবং W_2 তাহাদের ভার। G যদি সমগ্র বস্তুর ভারকেন্দ্র হয়, তাহা হইলে ইহা G_1G_2-কে এমনভাবে ভাগ করে যেন $W_1 . G_1G = W_2 . G_2G$.

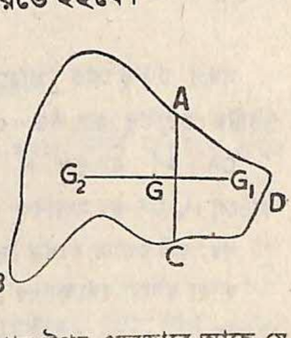
ইহা হইতে G-বিন্দুর অবস্থান জানা যায়।

[G_1G_2 রেখার উপর কোন প্রদত্ত বিন্দু O হইতে যদি G_1 এবং G_2-র দূরত্ব x_1 এবং x_2 হয় তাহা হইলে ভারকেন্দ্র G-এর দূরত্ব $\bar{x}$ এর জন্য

$$\bar{x} = \frac{W_1 x_1 + W_2 x_2}{W_1 + W_2}$$

G_1 হইতে G-এর দূরত্ব $G_1G = \frac{W_1 \times 0 + W_2 x_2}{W_1 + W_2} = \frac{W_2 x_2}{W_1 + W_2}$]

17-19. সমগ্র বস্তুর এবং এক অংশের ভার ও ভারকেন্দ্র দেওয়া আছে ; অপর অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে।



G সমগ্র বস্তু ABCD-র ভারকেন্দ্র এবং G_1, ADC অংশের ভারকেন্দ্র ; সমগ্র বস্তুর ভার W এবং ADC অংশের ভার W_1 হইলে অবশিষ্ট অংশের ভার $W - W_1$; মনে কর, ইহার ভারকেন্দ্র G_2। যেহেতু G_1 বিন্দুতে W_1 এবং G_2 বিন্দুতে $W - W_1$-এর লব্ধি G বিন্দুতে ক্রিয়া করে সুতরাং G_2-বিন্দু বর্ধিত G_1G রেখার উপর এমনভাবে আছে যে

$(W - W_1)GG_2 = W_1 . GG_1$. অর্থাৎ $GG_2 = \frac{W_1 . GG_1}{W - W_1}$

17-20 উদাহরণ :

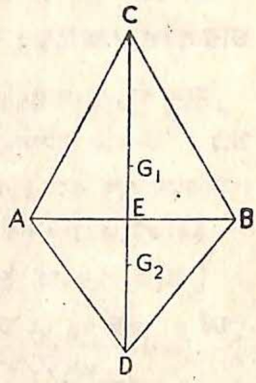
(1) একই ভূমি AB-র বিপরীতদিকে দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ CAB এবং DAB অঙ্কিত হইয়াছে। প্রথম ত্রিভুজের উচ্চতা 9 ইঞ্চি এবং দ্বিতীয় ত্রিভুজের উচ্চতা 6 ইঞ্চি। CADB ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

মনে কর, E বিন্দু AB সরলরেখার মধ্যবিন্দু। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির উপর লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। এখন C, E এবং D একই সরলরেখায় অবস্থিত।

ABC ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র G_1, মধ্যমা CE-র উপর এবং $CG_1 = \frac{2}{3} \times 9$ ইঞ্চি

DAB ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র G_2, মধ্যমা DE র উপর এবং $EG_2 = \frac{1}{3} \times 6 = 2$ ইঞ্চি

$CG_2 = 9 + 2 = 11$ ইঞ্চি।



CADB ক্ষেত্রের ভারকেন্দ্র CD রেখার উপর আছে, মনে কর, ইহার দূরত্ব C বিন্দু হইতে $\bar{x}$।
তাহা হইলে

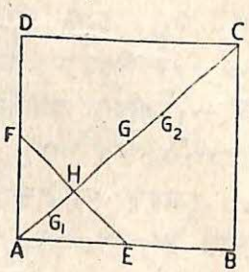
$$\bar{x} = \frac{(\frac{1}{2}AB \times 9) \times 6 + (\frac{1}{2}AB \times 6) \times 11}{\frac{1}{2}AB \times 9 + \frac{1}{2}AB \times 6}$$

$$= \frac{54 + 66}{15} = \frac{120}{15} = 8 \text{ ইঞ্চি।}$$

(2) ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। E এবং F বিন্দু AB এবং AD বাহুর মধ্য-বিন্দু। ত্রিভুজ AEF কাটিয়া ফেলিলে অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।
(C. U. I. Sc. 1955)

সমগ্র চতুর্ভুজের ভারকেন্দ্র G, কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দু এবং AG = CG

CA কর্ণ EF-কে H বিন্দুতে ছেদ করিলে H, EF-এর মধ্যবিন্দু।



ধর, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য $2a$

তাহা হইলে বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= 2a^2$$

এবং AEF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}a^2$

অতএব বর্গের ভার W হইলে ত্রিভুজের ভার $\frac{1}{8}W$ এবং অবশিষ্ট অংশের ভার $= \frac{7}{8}W$

ত্রিভুজের ভারকেন্দ্র G_1, AH রেখার উপর

এবং $AG_1 = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3}a, \quad \therefore \quad GG_1 = \frac{2}{3}a.$

G_2 যদি অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র হয়, G_2 বিন্দু CA কর্ণের উপর থাকিবে।

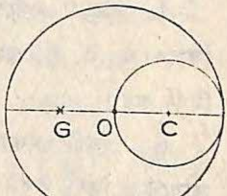
এবং $\frac{7}{8}W \times GG_2 = \frac{1}{8}W \times GG_1 \quad \therefore GG_2 = \frac{1}{7}GG_1 = \frac{1}{7} \times \frac{2}{3}a = \frac{1}{21} \times 2a$ $= \frac{1}{21}AC.$

(3) r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পাত হইতে উহার একটি ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত বৃত্ত কাটিয়া ফেলা হইয়াছে ; অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।
[উঃ প্রঃ বোর্ড 1942]

সমগ্রবৃত্তের ক্ষেত্রফল A হইলে, $A=\pi r^2$.

কাটিয়া ফেলা বৃত্তের ক্ষেত্রফল=

$$\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2=\frac{\pi r^2}{4}=\frac{1}{4}A$$



∴ সমগ্রবৃত্তের ভার W হইলে, কাটিয়া বাদ দেওয়া অংশের ভার $\frac{1}{4}W$

সুতরাং অবশিষ্ট অংশের ভার

$=W-\frac{1}{4}W=\frac{3}{4}W.$

বৃত্তের কেন্দ্র O সমগ্র বৃত্তের ভার-কেন্দ্র ; কাটিয়া ফেলা বৃত্তের ভারকেন্দ্র উহার কেন্দ্র C.

অবশিষ্ট অংশের ভার-কেন্দ্র বর্ধিত CO-সরলরেখার উপর একটি বিন্দু ; ধর উহা যেন G। তাহা হইলে

$$\frac{3}{4}W.OG=\frac{1}{4}W.OC=\frac{1}{4}W.\frac{r}{2}. \quad \therefore \quad OG=\frac{r}{6}.$$

অতএব নির্ণেয় ভারকেন্দ্র বর্ধিত CO সরলরেখার উপর O হইতে বৃত্তের ব্যাসার্ধের $\frac{1}{6}$ অংশ দূরে।

প্রশ্নমালা 16

1. তিনটি সমান সমান্তরাল বল একটি ত্রিভুজের তিন শীর্ষে প্রযুক্ত হইয়াছে। (i) যখন বলসমূহ সদৃশ তখন তাহাদের কেন্দ্র নির্ণয় কর। (ii) যখন একটি বল অসদৃশ তখন কেন্দ্র নির্ণয় কর।

2. দেখাও যে, একটি সমষড়ভুজের ছয় শীর্ষে ছয়টি সমান ভারের কণা রাখিলে তাহাদের ভারকেন্দ্র ষড়ভুজের কেন্দ্র।

3. ABCD চতুর্ভুজের A, B, C, D কোণে 2, 2, 3, 3 ভার রাখা হইয়াছে। ইহাদের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

4. এক সমদণ্ডের দৈর্ঘ্য 4 ফুট এবং ভার 5 পাউণ্ড। 1, 2, 3, 4, 5 পাউণ্ড ভার এক প্রান্ত হইতে আরম্ভ করিয়া 1 ফুট অন্তর রাখা হইয়াছে। ইহাদের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

5. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু 3, 4 এবং 5 ইঞ্চি ; প্রত্যেক বাহু হইতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

6. একটি ত্রিকোণ পাতের বাহু 3, 4 এবং 5 ইঞ্চি ; ইহাকে দীর্ঘতম বাহুর মধ্যবিন্দু হইতে ঝুলানো হইয়াছে। উল্লম্বদিকের সহিত এই বাহু কি কোণ করিয়া আছে ?

7. ABCD বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহু 10 ইঞ্চি। ইহার A, B, C, D কোণে 4, 5, 6 এবং 7 পাউণ্ড ভার রাখা হইয়াছে। ইহাদের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

8. একটি ঘনকাকৃতি (cubical) বাক্সের উপরের ঢাকনাটি নাই। ইহার ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

[সঙ্কেত :—A ভূমির কেন্দ্র, O ঘনকের কেন্দ্র। ভূমির ভার A বিন্দুতে ক্রিয়া করে—ধর পাঁচটি তলের প্রত্যেকের ভার W ; প্রতিসাম্য হইতে বুঝা যায় যে অপর চারি তলের ভারকেন্দ্র O. নির্ণেয় ভারকেন্দ্র G, AO রেখার উপর আছে। $AG=\dfrac{W\times 0+4W\times \frac{a}{2}}{5W}=\dfrac{2}{5}a$]

9. একটি সমকোণী ত্রিভুজে সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুইটি হইতে ইহার ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

10. তিনজন লোক W ভারের একটি ত্রিকোণ পাত বহন করিলে প্রত্যেকের উপর কত ভার পড়িবে ?

11. ABCD বর্গক্ষেত্রের সহিত অর্ধবর্গক্ষেত্র BEC যুক্ত করা হইয়াছে ; ABED চতুর্ভুজের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

12. r-ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার পাত হইতে একটি বৃত্তাকার অংশ কাটিয়া ফেলা হইয়াছে। এই অংশ পাতের কেন্দ্রের ভিতর দিয়া গিয়াছে এবং ইহার ব্যাস $\frac{1}{3}r$; অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর। [ক. বি 1940]

13. 6 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার পাত হইতে 2 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার অংশ কাটিয়া ফেলা হইয়াছে। যদি এই ছেদার কেন্দ্র পাতের কেন্দ্র হইতে 3 সেন্টিমিটার দূরে হয়, তাহা হইলে অবশিষ্ট অংশের ভার-কেন্দ্র নির্ণয় কর।

14. 3 ফুট ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার পাতে এক ফুট ব্যাসার্ধের এমন একটি ছেদা করিতে হইবে যেন অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র বৃত্তের ভারকেন্দ্র হইতে 2 ইঞ্চি দূরে হয়। ছেদার কেন্দ্র নির্ণয় কর।

15. ABCDEF একটি সম-ষড়ভুজ। ইহার A, B, C, D, E বিন্দুতে পাঁচটি সমান ভারের কণা রাখা হইয়াছে ; ইহাদের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

16. 3, 4, 3, 5, 8 এবং 5 গ্রাম ভার একটি সমষড়ভুজের কৌণিক বিন্দুতে যথাক্রমে স্থাপিত হইয়াছে ; তাহাদের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

17. ABCD একটি বর্গক্ষেত্র, O কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু। যদি AOB ত্রিভুজ অপসারিত হয়, অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

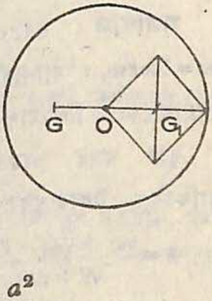
18. একটি বৃত্তাকার পাতে একটি বর্গাকার ছেদা করা হইল, বৃত্তের একটি ব্যাসার্ধ বর্গের কর্ণ। যদি বৃত্তের ব্যাস a হয়, তাহা হইলে দেখাও যে অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র বৃত্তের কেন্দ্র হইতে $\frac{a}{8\pi-4}$ দূরে অবস্থিত।

[উ. মা. 1967]

সমাধান :—

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi a^2}{4}$; বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\frac{a}{2}\times\frac{a}{4}=\frac{a^2}{8}$

$\therefore$ অবশিষ্টাংশের ক্ষেত্রফল $=\frac{\pi a^2}{4}-\frac{a^2}{8}=\frac{a^2}{8}(2\pi-1)$



সমগ্র বৃত্তের ভারকেন্দ্র উহার কেন্দ্র O-তে অবস্থিত, বর্গাকার অংশের ভারকেন্দ্র G_1 কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু।

$$\therefore \quad OG_1=\frac{a}{4}.$$

ধর, G অবশিষ্টাংশের ভারকেন্দ্র, ইহা বর্ধিত G_1O-এর উপর অবস্থিত। W_1 বর্গাকার ক্ষেত্রের ভার এবং W_2 অবশিষ্টাংশের ভার হইলে

$$W_2OG=W_1OG_1 \text{ অথবা } OG=\frac{W_1}{W_2}OG_1=\frac{\frac{a^2}{8}}{\frac{a^2}{8}(2\pi-1)}\cdot\frac{a}{4}$$

(যেহেতু ভার ক্ষেত্রফলের অনুপাতে)

$$=\frac{a}{8\pi-4}$$

19. একটি সরু সমতার বাঁকাইয়া a, b, c বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ করা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে ইহার ভারকেন্দ্র এবং A, B, C বিন্দুতে যথাক্রমে স্থাপিত $\frac{b+c}{2}$, $\frac{c+a}{2}$, $\frac{a+b}{2}$ তিনটি ভারের ভারকেন্দ্র একই।

*20 AB এবং AC যথাক্রমে $2a$ এবং $2b$ দৈর্ঘ্যের দুইটি সমদণ্ড। যদি $\angle ABC=\theta$ হয়, প্রমাণ কর যে A হইতে দণ্ড দুইটির ভারকেন্দ্রের দূরত্ব

$$\frac{(a^4+2a^2b^2\cos\theta+b^4)^{\frac{1}{2}}}{a+b}.$$

সমাধান: A-কে মূল বিন্দু লইয়া AB এবং AB-র লম্বরেখাকে অক্ষ লইয়া ভারকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(\bar{x}, \bar{y})$ ধর। (প্রত্যেক দণ্ডের ভার মধ্যবিন্দুতে ক্রিয়া করে)।

$$\bar{x}=\frac{2a\,a+2b\,b\cos\theta}{2a+2b}=\frac{a^2+b^2\cos\theta}{a+b}$$

$$\bar{y}=\frac{2a\times 0+2b.b\sin\theta}{2a+2b}=\frac{b^2\sin\theta}{a+b}$$

$$AG=\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2}=\frac{\{(a^2+b^2\cos\theta)^2+(b^2\sin\theta)^2\}^{\frac{1}{2}}}{a+b}$$

$$=\frac{(a^4+2a^2b^2\cos\theta+b^4)^{\frac{1}{2}}}{a+b}$$

21 একটি সরু সমতারকে বাঁকাইয়া r এবং r' ব্যাসার্ধের বহিস্পর্শকারী দুইটি অঙ্গুরীতে পরিণত করা হইয়াছে। স্পর্শবিন্দু হইতে ইহার ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: ধর, একক দৈর্ঘ্যের ভার w ; r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট অঙ্গুরীর ভার $W=2\pi rw$, r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট অঙ্গুরীর ভার $W'=2\pi r'w$. প্রত্যেকের ভার তাহার কেন্দ্রে ক্রিয়মাণ।

যুক্ত বস্তুর ভার-কেন্দ্র অঙ্গুরীদ্বয়ের কেন্দ্রের সংযোজক রেখার উপর থাকিবে। ইহার দূরত্ব স্পর্শবিন্দু হইতে $\bar{x}$ হইলে

$$\bar{x}=\frac{Wr+W'(-r')}{W+W}=\frac{2\pi rwr-2\pi r'wr'}{2\pi rw+2\pi r\,w}=\frac{r^2-r'^2}{r+r'}=r-r'$$

অতএব যুক্ত বস্তুর ভার-কেন্দ্র r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট অঙ্গুরীর কেন্দ্রের দিকে স্পর্শ বিন্দু হইতে $r-r'$ দূরে। $(r>r')$

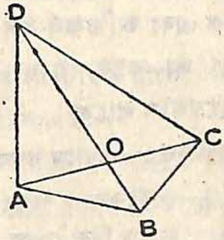
22 একখানি পাতলা সমভারের পিতলের পাতের এক অংশ ABCD আয়তক্ষেত্র এবং অপর অংশ আয়তক্ষেত্রের বাহিরে CDE সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। যদি $AB=10$ সেমি, $AD=4$ সেমি. এবং $CE=DE=13$ সেমি হয়, তাহা হইলে AB বাহু হইতে সমগ্র পাতের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

*17-20. **উপপাদ্য: চতুর্ভুজের ভারকেন্দ্র উহার চারি কোণে স্থাপিত চারিটি সমান ভারের কণা এবং উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে**

স্থাপিত সমান কিন্তু ঋণাত্মক ভারের একটি কণার ভারকেন্দ্রের সহিত মিলিয়া যায়।

মনে কর, ABD ত্রিভুজের ভার w_1 এবং BCD ত্রিভুজের ভার w_2, ইহারা একই ভূমির উপর অবস্থিত বলিয়া $\frac{w_1}{w_2}=\frac{AO}{CO}$.

∴ A বিন্দুতে w_2 ভার এবং C বিন্দুতে w_1 ভারের ভারকেন্দ্র O.



এখন ABD ত্রিভুজের পরিবর্তে

A, B এবং Dতে $\frac{w_1}{3}, \frac{w_1}{3}$ এবং $\frac{w_1}{3}$ লই,

BCD ত্রিভুজের পরিবর্তে

B, C এবং Dতে $\frac{w_2}{3}, \frac{w_2}{3}$ এবং $\frac{w_2}{3}$ লই।

তাহা হইলে A বিন্দুতে $\frac{w_1}{3}$, C বিন্দুতে $\frac{w_2}{3}$ এবং B ও D বিন্দুতে

$\frac{w_1+w_2}{3}$ ও $\frac{w_1+w_2}{3}$ পাইলাম।

A এবং C বিন্দুতে যথাক্রমে $\frac{w_2}{3}$ এবং $\frac{w_1}{3}$ যোগ করি এবং তাহাদের ভারকেন্দ্র Oতে ঋণাত্মক ভার $\frac{w_1+w_2}{3}$ লই।

ইহাতে প্রত্যেক কৌণিক বিন্দুতে $\frac{w_1+w_2}{3}$ পাইলাম এবং কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে $-\frac{w_1+w_2}{3}$ পাইলাম।

অতএব চতুর্ভুজের ভারকেন্দ্র ইহার প্রত্যেক কোণে স্থাপিত চারিটি সমান ভারের কণা এবং উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে স্থাপিত সমান কিন্তু ঋণাত্মক ভারের একটি কণার ভারকেন্দ্রের সহিত মিলিয়া যায়।

অনুসিদ্ধান্ত : ABCD চতুর্ভুজের এক সমতলে অবস্থিত একটি সরলরেখা হইতে তাহার কৌণিক বিন্দু A, B, C, D-র দূরত্ব যদি a, b, c, d হয় এবং কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর দূরত্ব e হয় তাহা হইলে ঐ সরলরেখা হইতে চতুর্ভুজের ভারকেন্দ্রের দূরত্ব $\frac{1}{3}(a+b+c+d-e)$.

ধর, চতুর্ভুজের ভার w,

$$\text{নির্ণেয় দূরত্ব}=\frac{\frac{w}{3}a+\frac{w}{3}b+\frac{w}{3}c+\frac{w}{3}d-\frac{w}{3}e}{\frac{w}{3}+\frac{w}{3}+\frac{w}{3}+\frac{w}{3}-\frac{w}{3}}=\frac{1}{3}(a+b+c+d-e)$$

অষ্টদশ পরিচ্ছেদ

ভারকেন্দ্রের ধর্ম
সুপ্রতিষ্ঠ, অপ্রতিষ্ঠ এবং উদাসীন সাম্যাবস্থা
Stable, unstable and neutral equilibrium

18-1. কোন বিন্দুতে আবদ্ধ ভারী বস্তুর সাম্যাবস্থা

যদি একটি ভারী বস্তু কোন বিন্দুতে আবদ্ধ হইয়া সাম্যাবস্থায় থাকে এবং অভিকর্ষ-বল ব্যতীত অন্য কোন বহিঃস্থ বল তাহার উপর ক্রিয়া না করে, তাহা হইলে ভারকেন্দ্র এবং আবদ্ধ বিন্দু একই উল্লম্বরেখায় থাকে।

প্রমাণ : এখানে বস্তুর উপর দুইটি মাত্র বল ক্রিয়া করে।

(i) ভারকেন্দ্র G বিন্দুতে উল্লম্ব নিম্নাভিমুখে বস্তুর ভার W

(ii) আবদ্ধ বিন্দু O-তে প্রতিক্রিয়া R.

যেহেতু বস্তুটি দুইটি মাত্র বলের ক্রিয়া হেতু সাম্যাবস্থায় আছে সুতরাং এই দুই বল সমান এবং একই সরল রেখায় বিপরীতমুখে ক্রিয়া করে।

অতএব (1) প্রতিক্রিয়া R = বস্তুর ভার W

(2) আবদ্ধ বিন্দু O এবং ভার-কেন্দ্র G একই উল্লম্বরেখার উপর অবস্থিত।

[এইক্ষেত্রে বস্তুর কোন বিন্দু একটি তলের সংলগ্ন হইয়া বস্তুটি তলের উপর অবস্থিত হইতে পারে, বস্তুটি কোন বিন্দুর চারিদিকে ঘূর্ণনক্ষম হইতে পারে অথবা কোন বিন্দুতে দড়ি বাঁধিয়া ঝুলান থাকিতে পারে।]

18-2. উল্লম্ব দিক্ এবং ওলন দড়ি (Vertical direction and plumb line)

পৃথিবীর অভিকর্ষ-বল প্রত্যেক বস্তুকে তাহার কেন্দ্রের দিকে আকর্ষণ করে ; কোন বস্তুকে পৃথিবী যেই বলে আকর্ষণ করে তাহা ঐ বস্তুর ভার। কোন বিন্দুতে অভিকর্ষ বলের দিক্‌কে উল্লম্ব দিক্ বলা হয়। বিভিন্ন স্থানের অভিলম্ব দিক্‌সমূহ বর্ধিত হইলে পৃথিবীর কেন্দ্রে মিলিত হইবে।

একটি নমনীয় দড়ির প্রান্তে একটি ভারী বস্তু (যেমন, সীসার গোলক) বাঁধিয়া ঝুলাইলে তাহাকে ওলন দড়ি বলে। দড়ির যে-কোন বিন্দুতে টান বস্তুর ভারের সমান ও বিপরীতমুখী। সুতরাং স্থিরাবস্থায় দড়িটি উল্লম্বভাবে থাকে।

উল্লম্ব দিক্‌কে ওলন দড়ির দিক্‌ও বলা হয়। ওলন দড়ি রাজমিস্ত্রিদের একটি অতি প্রয়োজনীয় বস্তু।

18-3. একটি ভারী বস্তু যদি তাহার ভারকেন্দ্রে আবদ্ধ থাকে, তাহা হইলে উহা সকল অবস্থানেই সাম্যবস্থায় থাকে।

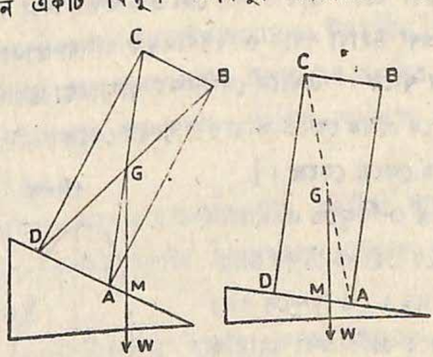
যেহেতু ভারকেন্দ্র আবদ্ধ বিন্দুতে অবস্থিত, বস্তুর ভার সকল অবস্থানেই আবদ্ধ বিন্দুর ভিতর দিয়া ক্রিয়া করে। ভারকেন্দ্র আবদ্ধ বলিয়া ভার বিন্দুটিকে সরাইতে পারে না ; আবার এই বিন্দুর চারিদিকে ভারের কোন ভ্রামক নাই। সুতরাং বস্তু সকল অবস্থানেই সাম্যাবস্থায় থাকিবে।

বস্তুর ভারকেন্দ্র আবদ্ধ করিলে বস্তু সকল অবস্থানে সুস্থিত থাকে, এইজন্য ভারকেন্দ্রকে বস্তুর তৌল বিন্দু (balancing point) বলা হয়।

18-4. একটি সমতলের উপর রক্ষিত বস্তুর ভারকেন্দ্রের ভিতর দিয়া অঙ্কিত উল্লম্ব রেখা তলকে ভূমির ভিতরে কোন বিন্দুতে ছেদ করিলে বস্তুটি দণ্ডায়মান থাকে, বাহিরে কোন বিন্দুতে ছেদ করিলে বস্তুটি পড়িয়া যায়।

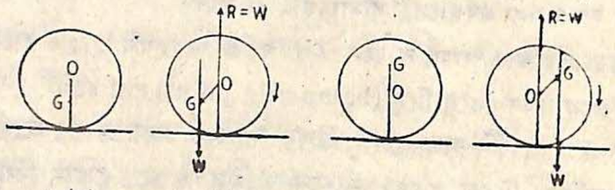
(i) প্রথমে মনে কর, ভারকেন্দ্রের ভিতর দিয়া উল্লম্বরেখা সমতলকে ভূমির বাহিরে M-বিন্দুতে ছেদ করে ; মনে কর, ভূমি-সংলগ্ন A বিন্দু M-বিন্দুর নিকটতম। G-বিন্দুর ভিতর দিয়া ক্রিয়মাণ ভার বস্তুটিকে A-বিন্দুর চারিদিকে এমন ভাবে ঘুরাইতে চাহে যেন ভূমি ও বস্তুর স্পর্শবিন্দুসমূহ হইতে বস্তুটি দূরে সরিয়া যায়। তলের প্রতিক্রিয়া বস্তুর কোন অংশকে উত্তোলনে বাধা দেয় না। অতএব যে ভ্রামক বস্তুকে A-বিন্দুর উপর উল্টাইয়া ফেলিতে চাহে তাহার প্রতিরোধক কোন ভ্রামক নাই। সুতরাং বস্তুটি পড়িয়া যায়।

(ii) এখন মনে কর, M-বিন্দু ভূমির ভিতরে আছে। মনে কর A-ভূমির সীমারেখায় কোন একটি বিন্দু। A বিন্দুর চারিদিকে ভারের ভ্রামক বস্তুর



তলসংলগ্ন বিন্দুসমূহকে তলের দিকে লইয়া যাইতে চাহে। তলের প্রতিক্রিয়া ইহা রোধ করে। সুতরাং বস্তু তলের উপর দণ্ডায়মান থাকে।

18-5. মনে কর, একটি গোলককে অনুভূমিক তলের উপর রাখা হইয়াছে। ১ নং (ক) চিত্রে গোলকের ভারকেন্দ্র G. উহার কেন্দ্র O-এর নীচে আছে। প্রতিক্রিয়া স্পর্শ বিন্দুতে ক্রিয়া করে। গোলক সাম্যাবস্থায় আছে বলিয়া প্রতিক্রিয়া ও ভার সমান। গোলকটিকে সামান্য গড়াইয়া দিলে প্রতিক্রিয়া নূতন স্পর্শবিন্দুর ভিতর দিয়া ক্রিয়া করে এবং গোলকের ঘূর্ণন হেতু OG রেখা



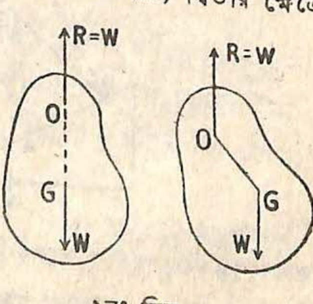
১ (খ) চিত্রে প্রদর্শিত অবস্থানে আসিয়াছে। এখন প্রতিক্রিয়া এবং ভার একটি যুগ্মক বা কাপ্‌লের সৃষ্টি করে। এই যুগ্মক গোলকটিকে পূর্ব অবস্থানে ফিরাইয়া নিতে চায়। এখানে গোলকের সাম্যাবস্থা সুপ্রতিষ্ঠ (stable)।

২ (ক) চিত্রে গোলকের ভারকেন্দ্র G উহার কেন্দ্র O-এর উপরে আছে। গোলকটিকে সামান্য গড়াইয়া দিলে প্রতিক্রিয়া নূতন স্পর্শ-বিন্দুর ভিতর দিয়া ক্রিয়া করে এবং গোলকের ঘূর্ণন হেতু OG রেখা (২খ) চিত্রে প্রদর্শিত অবস্থানে আসিয়াছে। প্রতিক্রিয়া এবং ভার একটি যুগ্মক বা কাপ্‌ল্ সৃষ্টি করে; এই যুগ্মক গোলকটিকে পূর্ব অবস্থান হইতে আরও দূরে সরাইয়া নিতে চায়। এখানে গোলকের সাম্যাবস্থা অপ্রতিষ্ঠ (unstable)।

গোলকের ভারকেন্দ্র যদি উহার কেন্দ্র O বিন্দু হয় তাহা হইলে স্থানান্তরিত অবস্থায় প্রতিক্রিয়া এবং ভার উভয়ই কেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়। উভয় বলের ক্রিয়ারেখা এক এবং উহারা সমান ও বিপরীতমুখী বলিয়া স্থানান্তরিত অবস্থাতেও বলটি সাম্যাবস্থায় থাকে। এখানে গোলকের সাম্যাবস্থা উদাসীন (neutral)।

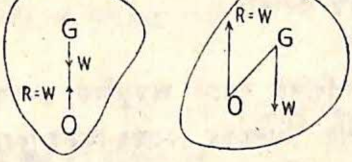
[লক্ষ্য কর যে প্রথম ক্ষেত্রে ভারকেন্দ্র বৃত্তের কেন্দ্রের নীচে, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে উপরে এবং তৃতীয় ক্ষেত্রে কেন্দ্রে।]

একটি ভারী বস্তু O-বিন্দুতে এমনভাবে আটকান আছে যে উহা O-বিন্দুর চারিদিকে ঘুরিতে পারে। G-বিন্দুতে বস্তুর ভার এবং O-বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া সমান ও বিপরীতমুখী (OG একটি উল্লম্বরেখা)। বস্তুটিকে তাহার সাম্যাবস্থা হইতে একটু



১নং চিত্র

ঘুরাইলে প্রতিক্রিয়া এবং ভার একটি যুগ্মকে পরিণত হয়। ১নং চিত্রে ভারকেন্দ্র G, O বিন্দুর নীচে এবং ২নং চিত্রে O বিন্দুর উপরে। প্রথম ক্ষেত্রে এই যুগ্মক বস্তুটিকে পুনরায় সাম্যাবস্থায় ফিরাইয়া আনিতে এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে সাম্যাবস্থা হইতে দূরে সরাইয়া নিতে চায়। প্রথম ক্ষেত্রে সাম্যাবস্থা সুপ্রতিষ্ঠ এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে অপ্রতিষ্ঠ।



২নং চিত্র

ভারকেন্দ্র যদি O-বিন্দুতে হয় তাহা হইলে বস্তুটি যে-কোন অবস্থানে সাম্যাবস্থায় থাকে ; তখন সাম্যাবস্থা উদাসীন।

লক্ষ্য কর ঃ—প্রথম ক্ষেত্রে ভারকেন্দ্র O বিন্দুর নীচে, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে উপরে এবং তৃতীয় ক্ষেত্রে O বিন্দুতে।

18-6. সংজ্ঞা : সুপ্রতিষ্ঠ, অপ্রতিষ্ঠ ও উদাসীন সাম্যাবস্থা (Stable, Unstable and Neutral Equilibrium)

যখন কোন বস্তুকে তাহার সাম্যাবস্থা হইতে একটু সরাইয়া দিলে ক্রিয়মাণ বলসমূহ তাহাকে পূর্বাবস্থায় ফিরাইয়া আনিতে চায় তখন তাহার সাম্যাবস্থা **সুপ্রতিষ্ঠ** (stable)।

যখন কোন বস্তুকে তাহার সাম্যাবস্থা হইতে একটু সরাইয়া দিলে ক্রিয়মাণ বলসমূহ তাহাকে পূর্ব সাম্যাবস্থা হইতে আরও দূরে লইয়া যায় তখন তাহার সাম্যাবস্থা **অপ্রতিষ্ঠ** (unstable)।

যখন কোন বস্তুকে তাহার সাম্যাবস্থা হইতে সরাইয়া দিলেও ক্রিয়মাণ বলসমূহ সাম্যাস্থায় থাকে তখন বস্তুটির সাম্যাবস্থা **উদাসীন** (neutral)।

দৃষ্টান্ত : ঘড়ির দোলককে তাহার উল্লম্বভাবে অবস্থিত সাম্যাবস্থা হইতে সরাইয়া দিলে উহা পূর্ব সাম্যাবস্থায় ফিরিয়া আসিতে চাহে। দোলকের সাম্যাবস্থা সুপ্রতিষ্ঠ।

একটি আলপিনকে তাহার সূক্ষ্মপ্রান্তে দাঁড় করাইয়া রাখিতে চাহিলে উহা পড়িয়া যায়, আলপিন উল্লম্বভাবে সাম্যাবস্থায় থাকিতে পারে বটে কিন্তু এই সাম্যাবস্থা অপ্রতিষ্ঠ।

একটি গোলকের ভারকেন্দ্র তাহার কেন্দ্রে থাকিলে অনুভূমিক তলে যে কোন অবস্থানে গড়াইয়া নিলে ইহা নূতন অবস্থানেও সাম্যাবস্থায় থাকে। গোলকের সাম্যাবস্থা উদাসীন।

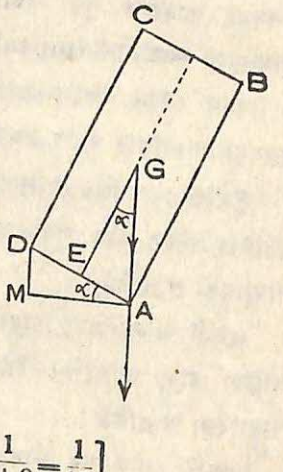
একটি শঙ্কু (cone) অনুভূমিক তলে তাহার ভূমির উপর দণ্ডায়মান থাকিলে উহার সাম্যাবস্থা সুপ্রতিষ্ঠ ; শীর্ষবিন্দুর উপর দণ্ডায়মান শঙ্কুর সাম্যাবস্থা অপ্রতিষ্ঠ এবং শোয়ানো অবস্থায় ইহার সাম্যাবস্থা উদাসীন।

18-7. কোন গোলাকৃতি তল-বিশিষ্ট বস্তুকে অনুভূমিক তলের উপর রাখিলে স্পর্শবিন্দুতে প্রতিক্রিয়া সর্বদাই গোলকের কেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়। বস্তুর ভারকেন্দ্র গোলকের কেন্দ্রের নীচে হইলে সাম্যাবস্থা সুপ্রতিষ্ঠ, উপরে হইলে অপ্রতিষ্ঠ এবং কেন্দ্রে হইলে উদাসীন। সমগ্র বস্তুটি গোলাকৃতি হইবার প্রয়োজন নাই। যেমন অর্ধগোলকের উপর চোঙ্গাকৃতি (cylindrical) অথবা শঙ্কুর-আকৃতি (conical) বস্তু সংযুক্ত হইয়া ভারকেন্দ্র গোলকের কেন্দ্রের নীচে হইলে সাম্যাবস্থা সুপ্রতিষ্ঠ।

18-8. **উদাহরণ :**

একটি স্তম্ভকের উচ্চতা 3 ফুট, ইহার বৃত্তাকার ভূমির ব্যাস 1 ফুট এবং ইহা একটি অনুভূমিক সমতলের উপর আছে। স্তম্ভকের এক কিনারা কি পরিমাণ উত্থিত হইলে ইহা উল্‌টিয়া যাইতে চাহিবে ?

মনে কর, কিনারা h পরিমাণ উত্থিত হইলে স্তম্ভক উল্‌টিয়া পড়িতে চায় এবং এই অবস্থায় ভূমির নতি α। এইক্ষেত্রে স্তম্ভকের অক্ষ এবং A বিন্দুগামী উলম্বরেখা ভারকেন্দ্র G-বিন্দুতে ছেদ করে।



$\angle AGE = \alpha$ এবং $MD = h$

$\tan \alpha = \frac{AE}{GE} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$

এখন, $\frac{h}{AD} = \sin \alpha$

$\therefore \quad h = AD \sin \alpha = 1 \times \frac{1}{\sqrt{10}}$ ফুট

$= \frac{\sqrt{10}}{10}$ ফুট।

$\left[\therefore \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10}\right]$

উনবিংশ পরিচ্ছেদ

যন্ত্র
Machines

19-1. ভার উত্তোলন করিবার জন্য কিংবা অন্য কোন বাধা অতিক্রম করিবার জন্য যন্ত্র ব্যবহৃত হয়।

বলবিজ্ঞানে যন্ত্র বলিতে এমন একটি ব্যবস্থা বুঝায় যাহার সাহায্যে সুবিধা মত কোন বিন্দুতে বল প্রযুক্ত হয় কিন্তু এই বল অন্যত্র ক্রিয়া করিয়া একটি বাধাকে অতিক্রম করে এবং অনেক সময়ে অপেক্ষাকৃত কম বল তদপেক্ষা অনেক বেশি বাধা অতিক্রম করে।

19-2. যেই বল (Force) প্রয়োগ করা হয় তাহাকে **উদ্যম** (Effort) বলে।

যেই-বাধা অতিক্রম করিবার জন্য অথবা যেই-ভার উত্তোলন করিবার জন্য বল প্রয়োগ করা হয় তাহাকে **ভার** (Weight) অথবা **বাধা** (Resistance) বলা হয়।

উদ্যমকে P দিয়া এবং বাধাকে W দিয়া নির্দেশ করা হয়।

19-3. যন্ত্র নিম্নলিখিত উদ্দেশ্যে ব্যবহৃত হয় :

(1) অপেক্ষাকৃত কম উদ্যমের দ্বারা তদপেক্ষা অনেক বেশি ভার উত্তোলন করিবার জন্য বা বেশি বাধা অতিক্রম করিবার জন্য।

যেমন, নততলের বা কপিকলের সাহায্যে ভারী জিনিস উত্তোলন করিবার জন্য।

(2) কোন বিন্দুতে গতি সঞ্চার করিয়া ভিন্ন বিন্দুতে দ্রুততর গতিসঞ্চার করিবার জন্য। যেমন, দ্বিচক্রযান।

(3) বাধা যে বিন্দুতে বা যেদিকে ক্রিয়া করে, তাহা হইতে পৃথক্ বিন্দুতে বা পৃথক্ দিকে সুবিধামত উদ্যম প্রয়োগের জন্য।

যেমন, দড়ি ও কপির সাহায্যে কূপ হইতে বাল্তি করিয়া জল উত্তোলনে।

19-4. বর্তমান পরিচ্ছেদে নিম্নলিখিত যন্ত্রসমূহের আলোচনা করা হইবে :

লিভার (Lever), তুলা (Balance), স্টীল ইয়ার্ড (Steel yard), কপি (Pulley) এবং নততল (Inclined plane)।

19-5. যান্ত্রিক সুবিধা (Mechanical Advantage) :

সংজ্ঞা : বাধা (W) এবং উদ্যমের (P) অনুপাতকে যান্ত্রিক সুবিধা বলা হয়।

$$\text{যান্ত্রিক সুবিধা} = \frac{\text{বাধা}}{\text{উদ্যম}} = \frac{W}{P}$$

সাধারণত যান্ত্রিক সুবিধা এক অপেক্ষা বড়।

[বাধা ও উদ্যমের অনুপাত একের কম হইলে তাহাকে যান্ত্রিক অসুবিধা বলা যায়।]

বেগানুপাত : যে-কোন যন্ত্রের বেগানুপাত বলিতে উদ্যমের বেগ ও ভারের বেগের অনুপাত বুঝায়। সুতরাং ইহা উদ্যমের প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ এবং একই সময়ে ভারের প্রয়োগ-বিন্দুর সরণের অনুপাত।

$$\text{বেগানুপাত} = \frac{\text{উদ্যমের সরণ}}{\text{ভারের সরণ}}$$

যন্ত্র যদি এমন হয় যে তাহার অংশ সমূহ উত্তোলন করিবার জন্য কোন কার্য সাধিত না হয় এবং ইহা সম্পূর্ণ মসৃণ হয় তাহা হইলে যান্ত্রিক সুবিধা এবং বেগানুপাত সমান হইয়া থাকে। সুতরাং তখন

$$\frac{W}{P} = \frac{\text{উদ্যমের সরণ}}{\text{ভারের সরণ}} = \frac{P\text{-এর সরণ}}{W\text{-এর সরণ}}$$

$$P \times P\text{-এর সরণ} = W \times W\text{-এর সরণ।}$$

অর্থাৎ উদ্যমের দ্বারা কৃত কার্য = ভারের বিরুদ্ধে কৃত কার্য।

19-6. যে-কোন যন্ত্রের জন্য কার্যতত্ত্ব (Principle of work) :

যদিও যন্ত্র সাহায্যে সাধারণত অপেক্ষাকৃত কম উদ্যম প্রয়োগ করিয়া অনেক বেশি বাধা অতিক্রম করা যায়, প্রত্যেক ক্ষেত্রেই কার্যতত্ত্ব প্রযোজ্য। ইহা হইল—**যন্ত্র ভার বা বাধার বিরুদ্ধে যে কাজ করে তাহা উদ্যমের দ্বারা কৃত কার্যের সমান।** ঘর্ষণ না থাকিলে অর্থাৎ যন্ত্র যদি সম্পূর্ণ মসৃণ হয় এবং যন্ত্রের যে সকল অংশের সরণ হয় তাহাদের ভার যদি অগ্রাহ্য করা হয়, তাহা হইলে যন্ত্রের দ্বারা কার্যের কোন হানি বা বৃদ্ধি হয় না।

কার্যতঃ যন্ত্রে যে উদ্যম প্রয়োগ করা হয়, তাহার সমস্তটাই ভার উত্তোলন বা বাধা অতিক্রম করে না ; কিছু উদ্যম যন্ত্রের অংশসমূহের ভার উত্তোলন করিতে অথবা ঘর্ষণজ বাধা অতিক্রম করিতে ব্যয়িত হয়। ভার উত্তোলন করিতে যে কার্য করা হয় এবং উদ্যম যে কার্য সাধন করে এই দুই-এর অনুপাতকে **যন্ত্রের যোগ্যতা** (Efficiency of the Machine) বলে।

$$\text{যন্ত্রের যোগ্যতা} = \frac{\text{ভার উত্তোলন করিতে বা বাধা অতিক্রম করিতে ব্যয়িত কার্য}}{\text{উদ্যমের দ্বারা কৃত কার্য}}$$

1. লিভার (The Lever)

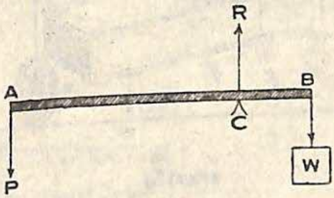
19-7. একটি নির্দিষ্ট অবলম্বন-বিন্দুর চারিদিকে ঘুরিতে পারে এমন একটি দৃঢ় দণ্ডকে **লিভার** বলে। নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে আলম্ব (fulcrum) বলা হয়। দণ্ডের কোন বিন্দুতে উদ্যম (P) প্রয়োগ করিয়া অন্য বিন্দুতে প্রযুক্ত ভার বা বা বাধা (W) অতিক্রম করা হয়। আলম্ব হইতে উদ্যম ও বাধার ক্রিয়ারেখার দূরত্বদ্বয় লিভারের দুই বাহু (arms)।

ঋজুদণ্ডের লিভারকে তিন শ্রেণীতে ভাগ করা হয়।

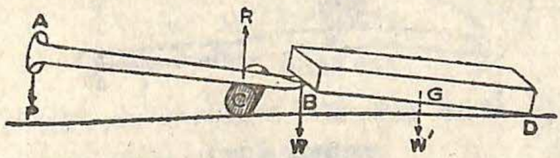
ধর, C আলম্ব এবং A বিন্দুতে দণ্ডের লম্বভাবে P উদ্যম প্রয়োগ করিয়া B বিন্দুতে ক্রিয়মাণ বাধা W-কে প্রশমিত করা হয়। R লিভারের উপর আলম্বের প্রতিক্রিয়া।

প্রথম শ্রেণীর লিভার (Class I Lever)।

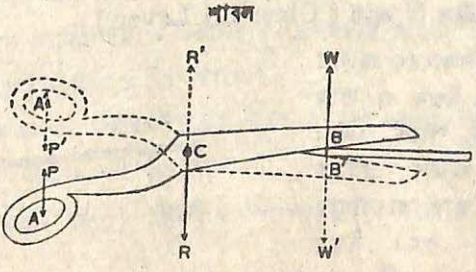
ইহাতে উদ্যম এবং ভার আলম্বের বিপরীত দিকে।



দৃষ্টান্ত : পাম্পের হাতল, শাবল (crowbar) [যখন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু কোন আলম্বের উপর রক্ষিত এবং প্রান্ত মাটিতে নহে], তুলা (balance)। কাঁচিতে (scissors) এই শ্রেণীর দুইটি লিভার যুক্ত থাকে।



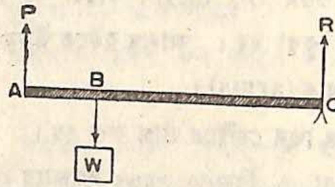
শাবল



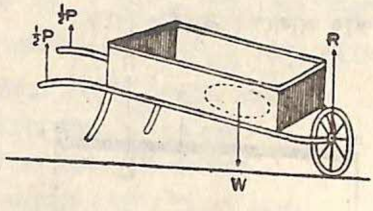
কাঁচি

দ্বিতীয় শ্রেণীর লিভার (Class II Lever)।

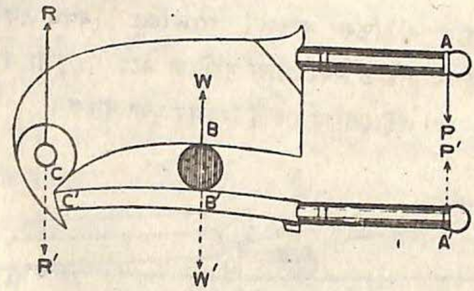
এই শ্রেণীর লিভারে উদ্যম এবং ভার আলম্বের একই পার্শ্বে ক্রিয়া করে ; আলম্ব হইতে উদ্যমের দূরত্ব ভারের দূরত্ব অপেক্ষা অধিক। ভার, উদ্যম ও আলম্বের মধ্যবর্তী কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করে। (উদ্যম ঊর্ধ্বাভিমুখী)



দৃষ্টান্ত : হাতগাড়ি (Wheel-barrow), শাবল (একপ্রান্ত মাটিতে), নৌকার দাঁড় (জলে-স্থিত প্রান্তকে আলম্ব মনে করিলে)। সুপারিভাঙা জাঁতিতে (nutcrackers)—এই শ্রেণীর দুইটি লিভার যুক্ত থাকে।

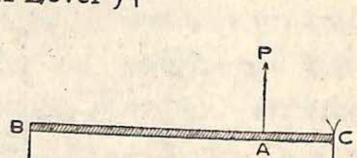


হাতগাড়ি



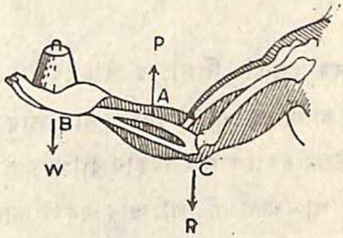
সুপারিভাঙা জাঁতি

তৃতীয় শ্রেণীর লিভার (Class III Lever)।

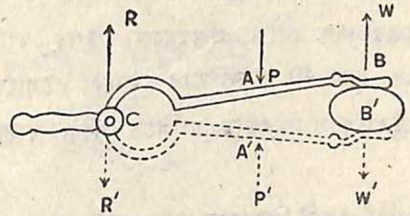


এই শ্রেণীর লিভারেও আলম্ব এক প্রান্তে এবং উদ্যম ও ভার আলম্বের একই পার্শ্বে ক্রিয়া করে কিন্তু আলম্ব হইতে উদ্যমের দূরত্ব ভার বা বাধার দূরত্ব অপেক্ষা কম। উদ্যম আলম্ব ও ভারের মধ্যবর্তী কোন বিন্দুতে ক্রিয়া করে।

দৃষ্টান্ত ঃ মানুষের বাহুতে কনুই-এর সম্মুখের অংশ ; এখানে কনুই আলম্ব, মাংসপেশীর সাহায্যে সম্মুখের বাহুতে উদ্যম প্রযুক্ত হইয়া হাতের তালুতে স্থিত ভার উত্তোলিত হয়। চিম্‌টা এই শ্রেণীর যুগল লিভার।



বাহু



চিম্‌টা

19-8. ঋজুদণ্ডের লিভারে সাম্যাবস্থা।

প্রথম শ্রেণীতে $R = P + W$

দ্বিতীয় শ্রেণীতে $R = W - P$

তৃতীয় শ্রেণীতে $R = P - W$

প্রত্যেক ক্ষেত্রেই $P.AC = W.BC$

$$\frac{W}{P} = \frac{AC}{BC} = \frac{\text{উদ্যমের দূরত্ব}}{\text{ভারের দূরত্ব}}$$

প্রথম শ্রেণীতে যখন আলম্ব হইতে উদ্যমের দূরত্ব ভারের দূরত্ব অপেক্ষা অধিক রাখা হয় তখন আমরা যান্ত্রিক সুবিধা পাই।

দ্বিতীয় শ্রেণীতে আলম্ব হইতে উদ্যমের দূরত্ব সর্বদাই ভারের দূরত্ব অপেক্ষা অধিক সুতরাং সর্বদাই যান্ত্রিক সুবিধা আছে।

তৃতীয় শ্রেণীতে আলম্ব হইতে উদ্যমের দূরত্ব সর্বদাই ভারের দূরত্ব অপেক্ষা কম, অতএব এখানে যান্ত্রিক অসুবিধা হয়।

লক্ষ্য কর ঃ তিন শ্রেণীর লিভারে আলম্ব, রোধ এবং উদ্যম যথাক্রমে মধ্যে থাকে।

প্রশ্নমালা 17 (ক)

1. 10 ফুট দীর্ঘ একটি সরল লিভারের একপ্রান্তে 9 পা. ভার যদি অপর প্রান্তে 21 পা. ভারকে সাম্যাবস্থায় রাখে, তাহা হইলে বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

2. একটি প্রথম শ্রেণীর লিভারের বাহুদ্বয় 20 সে. মি. এবং 30 সে. মি. দীর্ঘ। যদি ক্ষুদ্রতর বাহুর প্রান্তে 15 কিলোগ্রাম ভার প্রয়োগ করা হয় তাহা হইলে কি পরিমাণ উদ্যম ইহাকে সাম্যাবস্থায় রাখিতে পারে?

3. যখন 15 পা. এবং 5 পা. ভার একটি ভারহীন লিভারের দুইপ্রান্ত হইতে ঝুলানো হয় তখন আলম্ব ক্ষুদ্রতর ভার হইতে 7 ফুট দূরে। যখন উভয় ভারের প্রত্যেককে 2 পাউণ্ড বৃদ্ধি করা হয় তখন আলম্ব কোথায় হইবে?

4. একটি দণ্ডের এক প্রান্ত প্রস্তরখণ্ডের উপর রাখিয়া উহা হইতে দণ্ডের এক-চতুর্থাংশ দূরে 40 পাউণ্ড ভার ঝুলানো হইয়াছে। অপর প্রান্তে কত উদ্যমের দ্বারা ইহাকে সাম্যাবস্থায় রাখিতে পারা যাইবে? প্রস্তরখণ্ডের উপর চাপ কত?

5. দ্বিতীয় শ্রেণীর একটি লিভারের আলম্বের উপর চাপ 8 পাউণ্ড; উদ্যম এবং ভারের যোগফল 14 পা. ভার। যদি ইহারা 16 ইঞ্চি ব্যবধানে হয়, তাহা হইলে আলম্ব হইতে ইহাদের দূরত্ব নির্ণয় কর।

6. দ্বিতীয় শ্রেণীর একটি লিভারের দৈর্ঘ্য 6 ফুট। ইহা 70 পাউণ্ড ভার বহন করে এবং আলম্বের উপর চাপ উদ্যমের চার গুণ। উদ্যম কত এবং আলম্ব হইতে ভারের দূরত্ব কি?

7. তৃতীয় শ্রেণীর একটি লিভারে উদ্যম ভারের 5 গুণ, আলম্বের উপর চাপ 32 পাউণ্ড। ভার নির্ণয় কর।

8. একজন লোক একখণ্ড ভারী পাথর উঠাইবার উদ্দেশ্যে তাহার নীচে শাবল চালাইয়া পাথরের যে প্রান্ত শাবলের সংস্পর্শে আছে সে-প্রান্ত হইতে 6 ইঞ্চি দূরে একটি আলম্বের উপর রাখিয়া শাবলের অন্য প্রান্তে শরীরের সমস্ত ভার দিয়া চাপ দিল। শাবল অনুভূমিকভাবে আছে, ইহার দৈর্ঘ্য 6 ফুট এবং লোকটির ভার 120 পাউণ্ড। সে পাথরের উপর কি বল প্রয়োগ করে এবং আলম্বের উপর চাপ কত?

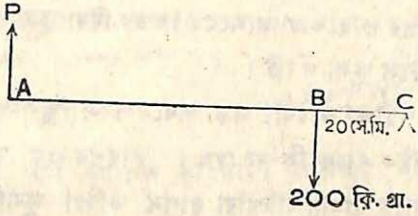
9. একখণ্ড ঘনকাকৃতি পাথরের ভার 400 কিলোগ্রাম, প্রত্যেক বাহু এক মিটার। ইহার তলায় একটি 1·6 মিটার দীর্ঘ শাবলের 20 সে. মি. প্রবেশ

করাইয়া দেওয়া হইয়াছে। এখন পাথরটিকে উঠাইবার জন্য শাবলের অপর প্রান্তে কত বল প্রয়োগ করিতে হইবে ?

[সংকেত : B বিন্দুতে চাপ = পাথরের ভারের অর্ধেক = 200 কি. গ্রা.

$$P \times 160 = 200 \times 20$$

$$\therefore P = 25 \text{ কি. গ্রা.}$$

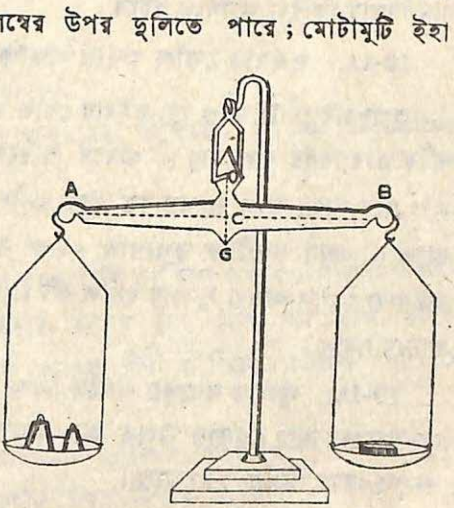


10. 6 ইঞ্চি লম্বা সুপারি ভাঙ্গা জাঁতির ভিতর জাঁতির মাথা হইতে 1 ইঞ্চি দূরে সুপারি রাখিয়া প্রান্তে 4 পা. ভারের সমান চাপ দিলে ইহা ভাঙ্গে। সুপারির ঠিক উপরে কত বল প্রয়োগ করিলে ইহা ভাঙ্গিবে ?

2. তুলাযন্ত্র (Balances)

19-9. সাধারণ তুলা (Common Balance) : একটি দৃঢ় দণ্ডের দুই প্রান্ত হইতে দুইটি তুলাপাত্র (scale Pans) ঝুলান থাকে এবং দণ্ডটি মাঝামাঝি জায়গায় একটি আলম্বের উপর দুলিতে পারে ; মোটামুটি ইহা হইল সাধারণ তুলা।

বস্তুর ভর তুলনা করিবার জন্য তুলা ব্যবহৃত হয়। একদিকের তুলাপাত্রে পরিমেয় বস্তু এবং অন্যদিকের তুলাপাত্রে বাটখারা স্থাপন করা হয়।



চিত্রে, আলম্ব *O* দণ্ডের বাহিরে এবং দণ্ডের সহিত দৃঢ়-সংবদ্ধ ; *OC* দণ্ডের উপর লম্ব। *CA* এবং *CB* বাহু সমান দৈর্ঘ্যের হইলে, দণ্ডের ভারকেন্দ্র যদি *OC* রেখার উপর থাকে এবং তুলাপাত্র দুইটির ভার যদি সমান হয়,

তাহা হইলে তুলাদণ্ড যখন অনুভূমিক থাকে তখন বস্তুটির ভার প্রমাণ বাটখারার ভারের সমান। সুতরাং বস্তুর ভর প্রমাণ বাটখারার ভরের সমান।

19-10. **ভাল তুলার জন্য শর্ত :**

(1) তুলা খাঁটি হইতে হইবে।

যদি তুলাদণ্ডের বাহু দুইটি সমান দীর্ঘ হয় ও তুলাপাত্র দুইটির ভার সমান হয় এবং যদি তুলাদণ্ডের ভারকেন্দ্র আলম্বের ভিতর দিয়া তুলাদণ্ডের লম্ব রেখার উপর থাকে, তাহা হইলে তুলা খাঁটি।

তুলার বিশুদ্ধতা পরীক্ষা করিবার জন্য প্রথমে যখন তুলাপাত্র খালি থাকে তখন তুলাদণ্ড অনুভূমিক থাকে কি-না দেখ। তারপর এক তুলাপাত্রে কোন বস্তু এবং অন্য তুলাপাত্রে প্রমাণ বাটখারা স্থাপন করিয়া তুলাদণ্ডটি অনুভূমিক কর। এখন বস্তু ও বাটখারা উঠাইয়া লইয়া যে পাত্রে বাটখারা ছিল সেই পাত্রে বস্তু রাখ এবং যে পাত্রে বস্তু ছিল সেই পাত্রে বাটখারা রাখ। যদি তুলাদণ্ড অনুভূমিক থাকে তাহা হইলে তুলা খাঁটি—তুলাদণ্ড হেলিয়া থাকিলে তুলাতে ত্রুটি আছে।

(2) তুলা সুবেদী (sensitive) হইতে হইবে। দুই তুলাপাত্রে রক্ষিত বস্তুর ভারের অতি সামান্য পার্থক্যের জন্যও তুলাদণ্ড হেলিয়া যাইবে।

(3) তুলা সুপ্রতিষ্ঠ (stable) হইতে হইবে এবং অল্প সময়ের মধ্যেই সাম্যাবস্থায় ফিরিয়া আসিতে হইবে।

19-11. **দুইবার তৌল করার পদ্ধতি (Double weighing) :**

তুলা যদি খাঁটি না-ও হয়, দুইবার তৌল করার পদ্ধতি অবলম্বন করিয়া বস্তুর সঠিক ভার নির্ণয় করা যায়। প্রথমে পরিমেয় বস্তুটি একটি তুলাপাত্রে রাখ এবং অন্য পাত্রে বালি বা অন্য বস্তু দিয়া তৌল কর যেন তুলাদণ্ড অনুভূমিক থাকে। এখন বস্তুটিকে তুলাপাত্র হইতে সরাইয়া লও এবং ঐ পাত্রে প্রমাণ বাটখারা স্থাপন করিয়া পুনরায় তৌল কর। তাহা হইলে, বাটখারার ভার বস্তুর ভারের সমান।

19-12. **তুলার বাহুদ্বয় সমান কিন্তু ভারকেন্দ্র যদি আলম্ব হইতে তুলাদণ্ডের লম্ব রেখার উপর না থাকে তাহা হইলে নিম্ন উপায়ে প্রকৃত ভার নির্ণয় করা যায়।**

মনে কর, বস্তুর প্রকৃত ভার W এবং প্রথমে বস্তুকে তৌল করিবার জন্য W_1 বাটখারা প্রয়োজন হইল। এখন বাটখারা সরাইয়া বস্তুকে ঐ তুলাপাত্রে

রাখ এবং মনে কর, অপর তুলাপাত্রে W_2 বাটখারা দিয়া তৌল করিবার প্রয়োজন হইল।

ধর তুলার ভার W' এবং আলম্ব হইতে তুলার ভারকেন্দ্রের অনুভূমিক দূরত্ব x। তাহা হইলে আলম্বের চারিদিকে ভ্রামক লইয়া,

$$W_1a+W'x=Wa.$$

আবার $Wa+W'x=W_2a.$

বিয়োগ করিয়া $(W_1-W)a=(W-W_2)a$

$$\therefore \quad W_1-W=W-W_2$$

$$2W=W_1+W_2 \qquad \therefore \quad W=\frac{W_1+W_2}{2}$$

বস্তুর প্রকৃত ভার আপাত ভারদ্বয়ের **সমান্তর মধ্যক** (Arithmetic mean)।

19-13. তুলার বাহুদ্বয় অসমান কিন্তু খালি তুলাপাত্র লইয়া তুলাদণ্ড অনুভূমিক থাকিলে নিম্ন উপায়ে প্রকৃত ভার নির্ণয় করা যায়।

মনে কর, তুলার বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য a এবং b, বস্তুর প্রকৃত ভার W। যদি যথাক্রমে W_1 এবং W_2 বাটখারার দ্বারা ইহাকে দুই তুলাপাত্রে তৌল করা যায়,

তাহা হইলে $W.a=W_1b$

$$W_2a=W.b$$

গুণ করিয়া $W^2ab=W_1W_2ab$

$$\therefore \quad W=\sqrt{W_1W_2}.$$

বস্তুর প্রকৃত ভার আপাত ভারদ্বয়ের **গুণোত্তর মধ্যক** (Geometric mean)।

19-14. উদাহরণ:

অসমান বাহুর তুলাতে তুলাপাত্র খালি থাকিলে তুলাদণ্ড অনুভূমিক থাকে। প্রমাণ কর যে একজন দোকানদার এরকম তুলা দিয়া পালাক্রমে দুইদিকে দুইবার জিনিস রাখিয়া সমান ভারের জিনিস বিক্রয় করিলে সে নিজেই ঠকিবে।

মনে কর, সে W ভারের বাটখারা দুইদিকে দুইবার দিল; প্রথম ক্ষেত্রে বস্তুর প্রকৃত ভার W_1 এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে W_2। a এবং b তুলাদণ্ডের দুই বাহুর দৈর্ঘ্য।

আলম্বের চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$W_1 a = Wb. \quad \text{অথবা} \quad W_1 = W \times \frac{b}{a}$$

$$W_2 b = Wa \qquad W_2 = W \times \frac{a}{b},$$

এখন $W_1 + W_2 - 2W = W\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2\right)$

$$= W \times \frac{b^2 + a^2 - 2ab}{ab}$$

$$= W \times \frac{(b-a)^2}{ab} \text{ একটি ধনসংখ্যা}$$

$$\therefore \quad W_1 + W_2 > 2W.$$

প্রশ্নমালা 17(খ)

1. একটি তুলার একমাত্র দোষ এক পাল্লা অপর পাল্লা অপেক্ষা ভারী। একটি বস্তুকে ইহার এক পাল্লায় রাখিলে 14 পা বাটখারা এবং অন্য পাল্লায় রাখিলে 16 পা. বাটখারা দিয়া তৌল করিতে হয়। বস্তুটির প্রকৃত ভার নির্ণয় কর।

2. একটি তুলার বাহুদ্বয় 10 ইঞ্চি এবং $10\frac{1}{2}$ ইঞ্চি। দীর্ঘতর পাল্লাতে বস্তু রাখিয়া তৌল করিলে আপাত ভার যদি 21 পাউণ্ড হয় তাহা হইলে বস্তুর প্রকৃত ভার কত ?

3. একটি তুলার একটি পাল্লা ভারী করা হইয়াছে। 30 গ্রাম ভারের বস্তুকে এই পাল্লাতে তৌল করিলে আপাত ভার হয় 32 গ্রাম। কত ভার দিয়া পাল্লটিকে ভারী করা হইয়াছে ?

4. একটি তুলার বাহুদ্বয় অসমান, একটি বস্তুকে ইহার এক পাল্লায় রাখিলে, আপাত ভার 8 পা. এবং অপর পাল্লায় রাখিলে 9 পা. হয়। বস্তুর প্রকৃত ভার নির্ণয় কর।

5. একটি তুলার বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 10 ইঞ্চি এবং 11 ইঞ্চি ; এই তুলায় দীর্ঘতর বাহুর পাল্লায় মাপিয়া যদি দোকানদার $2\frac{1}{2}$ টাকা পাউণ্ড দরে চা বিক্রয় করে তাহা হইলে প্রকৃতপক্ষে প্রতি পাউণ্ডের কত মূল্য দেওয়া হয় ?

6. একটি তুলার বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য a এবং b ; W ভার ক্ষুদ্রতর বাহু হইতে W_1-কে তৌল করে এবং বৃহত্তর বাহু হইতে W_2কে তৌল করে, দেখাও যে $\frac{a}{b} = \frac{W_1 - W}{W - W_2}$.

7. একটি তুলার বাহুদ্বয় অসমান। দীর্ঘতর বাহুর পাল্লাতে 10 কিলোগ্রাম ভারের বস্তু রাখিয়া তৌল করিতে 10·56 কিলোগ্রাম বাটখারার প্রয়োজন; অপর পাল্লায় রাখিলে 9·36 কিলোগ্রাম বাটখারা দিয়া তৌল হয়। বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের অনুপাত নির্ণয় কর।

8. একটি ত্রুটিপূর্ণ তুলাতে একটি বস্তু দুই পাল্লাতে যথাক্রমে রাখিয়া তৌল করিলে আপাত ভার 9 এবং 4 পাউণ্ড হয়। তুলার বাহুদ্বয়ের অনুপাত এবং বস্তুর প্রকৃত ভার নির্ণয় কর।

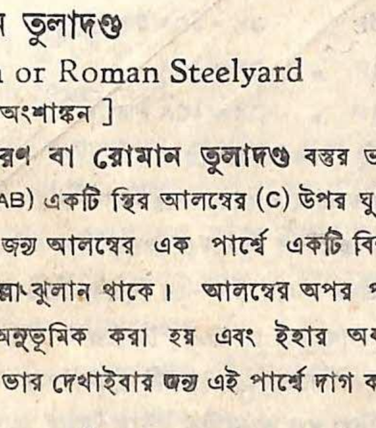
---

3. (a) রোমান তুলাদণ্ড

The Common or Roman Steelyard

[Graduation—অংশাঙ্কন]

19-15. **সাধারণ বা রোমান তুলাদণ্ড** বস্তুর ভার নিরূপণের একটি যন্ত্র। একটি দণ্ড (AB) একটি স্থির আলম্বের (C) উপর ঘুরিতে পারে। ওজন করিবার বস্তু বহনের জন্য আলম্বের এক পার্শ্বে একটি বিন্দু (A) হইতে একটি হুক অথবা একটি পাল্লা ঝুলান থাকে। আলম্বের অপর পার্শ্বে একটি ভার (P) সরাইয়া দণ্ডটিকে অনুভূমিক করা হয় এবং ইহার অবস্থান দৃষ্টে বস্তুর ভার নির্ণীত হয়। বস্তুর ভার দেখাইবার জন্য এই পার্শ্বে দাগ কাটা থাকে।



19-16. **অংশাঙ্কন:** মনে কর, তুলাদণ্ডের ভার W′ এবং দণ্ডের G বিন্দুর ভিতর দিয়া এই ভার ক্রিয়া করে। দণ্ডটি এইরূপভাবে নির্মিত হয় যেন G ক্ষুদ্রতর বাহু AC-তে থাকে। যখন তুলাপাত্রে কোন বস্তু থাকে না তখন মনে কর, P ভারকে O বিন্দুতে রাখিলে দণ্ডটি অনুভূমিক থাকে।

C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$W'.GC = P.CO \cdots\cdots(i)$$

যখন তুলাপাত্রে W ভার রাখা হয় তখন Pকে সরাইয়া X বিন্দুতে আনয়ন করিলে দণ্ডটি অনুভূমিক থাকে

তাহা হইলে $W.CA + W.'GC = P.CX$............(ii)

(ii) হইতে (i) বিয়োগ করিয়া

$$W.CA = P\,OX$$

$$\therefore \quad OX = \frac{W}{P}.CA$$

যখন $W = P$ তখন $OX = CA$.

$W = 2P$ „ $OX = 2CA$

$W = 3P$ „ $OX = 3CA$ ইত্যাদি ;

$W = \frac{1}{2}P$ „ $OX = \frac{1}{2}CA$,

$W = \frac{1}{3}P$ „ $OX = \frac{1}{3}CA$ ইত্যাদি।

সুতরাং আমরা এই নিয়ম পাইতেছি :

পাল্লা খালি অবস্থায় এবং পাল্লাতে P র সমান ভার রাখিয়া যে দুই বিন্দুতে সরণক্ষম ভার P-কে রাখিলে তুলাদণ্ড অনুভূমিক থাকে তাহারা যথাক্রমে O এবং X_1 বিন্দু। এখন OBতে OX_1-এর দ্বিগুণ, ত্রিগুণ ইত্যাদি ক্রমে দাগ কাটিয়া 2, 3 ইত্যাদি লেখা যায়। OX_1 বিন্দুতে 1 লেখা যায় এবং OX_1এর অর্ধাংশ, তৃতীয়াংশ, ইত্যাদিতে $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ইত্যাদি লেখা যায়। তাহা হইলে এই সমস্ত অবস্থানে P রাখিয়া দণ্ড অনুভূমিক হইলে বস্তর ভার 2P, 3P ইত্যাদি এবং $\frac{1}{2}P$, $\frac{1}{3}P$ ইত্যাদি হইবে।

P যদি 1 পা. ভার হয়, তাহা হইলে অংশিত অঙ্কগুলি পাউণ্ড ভার নির্দেশ করিবে।

উদাহরণ :

নূতন অবস্থায় একটি রোমান তুলাদণ্ডে সঠিকভাবে অংশাংকন করা আছে। দণ্ডের ক্ষয় হেতু উহার ভার এবং ভারকেন্দ্রের সামান্য পরিবর্তন হইয়াছে। যে বস্তর প্রকৃত ভার 5 পা $\frac{1}{2}$ আউন্স তাহার প্রতীতভার 5 পা.। যে বস্তর ভার 12 পা. প্রতীত হয় তাহার প্রকৃত ভার নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় প্রকৃত ভার = W

ধর, নূতন তুলাদণ্ডের ভার W' এবং G তাহার ভারকেন্দ্র ; ক্ষয় হেতু ভার w' এবং ভারকেন্দ্র G'

[পূর্ব পৃষ্ঠায় চিত্র দেখ]

নূতন অবস্থায় $5\frac{1}{32}.CA + W'.GC = P.CX$ (1)

ক্ষয়প্রাপ্ত অবস্থায় $5CA + w'G'C = P\ CX$ (2)

$\therefore\ \frac{1}{32}CA + W'.GC - w'.G'C = 0$ I

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে মনে কর, P কে X_1 অবস্থানে রাখা হইয়াছে

নূতন তুলাদণ্ডে $W\ CA + W'.GC = P.CX_1$ (3)

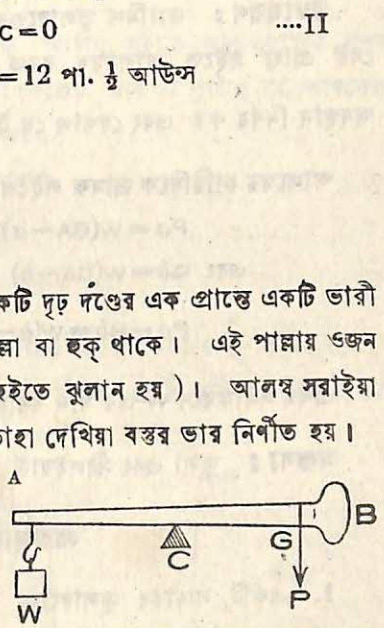
$12CA + w'.G'C = P\ CX_1$ (4)

$\therefore\ (W-12)CA + W'\ GC - w'G'C = 0$ II

I & II হইতে $W - 12 = \frac{1}{32}$ বা $W = 12$ পা. $\frac{1}{2}$ আউন্স

3. (b) ড্যানিশ তুলাদণ্ড
Danish Steelyard.

ইহা ও বস্তুর ভার নিরূপণের যন্ত্র। একটি দৃঢ় দণ্ডের এক প্রান্তে একটি ভারী পিণ্ড আছে ; অপর প্রান্তে একটি পাল্লা বা হুক্ থাকে। এই পাল্লায় ওজন করিবার বস্তুটি রাখা হয় (অথবা হুক্ হইতে ঝুলান হয়)। আলম্ব সরাইয়া যে স্থানে রাখিলে দণ্ড অনুভূমিক থাকে তাহা দেখিয়া বস্তুর ভার নির্ণীত হয়।



মনে কর, দণ্ড এবং পাল্লার ভার P এবং G ভারকেন্দ্র। পাল্লাতে কিছু না রাখিয়া যে বিন্দুতে আলম্ব রাখিলে দণ্ড অনুভূমিক থাকে সেই বিন্দু G.

এখন ধর, পাল্লাতে W ভারের বস্তু রাখা হইয়াছে এবং আলম্ব C অবস্থানে আনিলে দণ্ড অনুভূমিক থাকে।

C বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া

$$W.AC = P.CG = P.(AG - AC).$$

অর্থাৎ $(P+W)AC = P.AG.$

$$\therefore\ AC = \frac{P}{P+W}\ AG$$

এই সমীকরণে $W = P,\ 2P,\ 3P, \ldots\ldots$ইত্যাদি স্থাপন করিয়া $AC = \frac{1}{2}AG$, $\frac{1}{3}AG$, $\frac{1}{4}AG, \ldots\ldots$ইত্যাদি পাওয়া যায়।

$W = \frac{1}{2}P,\ \frac{1}{3}P,\ \frac{1}{4}P \ldots\ldots$ইত্যাদি স্থাপন করিলে $AC = \frac{2}{3}AG,\ \frac{3}{4}AG,\ \frac{4}{5}AG, \ldots$ ইত্যাদি পাওয়া যায়।

অংশাঙ্কন। এখন, $AC_1=\frac{1}{2}AG$, $AC_2=\frac{1}{3}AG$, $AC_3=\frac{1}{4}AG\cdots$ লইয়া C_1, C_2, C_3 প্রভৃতি অবস্থানের জন্য 1, 2, 3,……দাগ কাটিলে এই সকল অবস্থানে আলম্ব থাকিলে বস্তুর ভার যথাক্রমে P, 2P, 3P,….ইত্যাদি হইবে। আবার A হইতে পরপর $\frac{2}{3}AG$, $\frac{3}{4}AG$, $\frac{4}{5}AG$,….ইত্যাদি অংশ মাপিয়া ঐ সকল বিন্দুতে $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ দাগ কাটা যায়। এই সকল অবস্থানে আলম্ব থাকিলে বস্তুর ভার $\frac{1}{2}P$, $\frac{1}{3}P$, $\frac{1}{4}P$ ইত্যাদি।

উদাহরণ: ড্যানিশ তুলাদণ্ডের পাল্লায় যথাক্রমে P এবং Q ভার রাখিলে সেই প্রান্ত হইতে আলম্বের দূরত্ব যথাক্রমে a এবং b, যন্ত্রের ভারকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর এবং দেখাও যে ইহার ভার $\frac{bQ-aP}{a-b}$. [ক.বি. 1944]

আলম্বের চারিদিকে ভ্রামক লইলে

$$Pa=W(GA-a)$$

$$\text{এবং } Qb=W(GA-b).$$

$$\therefore\ Pa-Qb=W(b-a) \qquad \therefore\ W=\frac{bQ-aP}{a-b}.$$

প্রথম সমীকরণে W-এর মান বসাইয়া $GA=\frac{ab(Q-P)}{bQ-aP}$.

মন্তব্য: তুলা এবং স্টীলইয়ার্ড ইহারা প্রথম শ্রেণীর লিভার।

প্রশ্নমালা 17(গ)

1. একটি সাধারণ তুলাদণ্ডের ভার 10 পাউণ্ড। আলম্ব হইতে 5 ইঞ্চি দূরে ভার ঝুলাইবার বিন্দু এবং তুলাদণ্ডের ভারকেন্দ্র বিপরীত দিকে আলম্ব হইতে $3\frac{1}{2}$ ইঞ্চি দূরে। যে ভার সরান হয় তাহা 15 পাউণ্ড। এক হন্দর ভার ওজন করিতে হইলে সরণক্ষম ভারটি কত দূরে রাখিতে হইবে?

2. একটি সাধারণ তুলাদণ্ডের ভার 15 পাউণ্ড। আলম্ব হইতে 4 ইঞ্চি দূরে ভার ঝুলাইবার বিন্দু এবং তুলাদণ্ডের ভারকেন্দ্র বিপরীত দিকে আলম্ব হইতে 1 ইঞ্চি দূরে। সরণক্ষম ভার যদি 5 পাউণ্ড হয় তাহা হইলে 10 পাউণ্ড, 20 পাউণ্ড, 40 পাউণ্ড এবং 80 পা. ওজন করিতে আলম্ব হইতে কত দূরের বিন্দুতে যথাক্রমে সরণক্ষম ভার রাখিতে হইবে?

3. আড়াই ফুট দীর্ঘ এবং 4 পাউণ্ড ভারের একটি সমদণ্ডকে একপ্রান্ত হইতে 5 ইঞ্চি দূরে আলম্বের উপর তুলাদণ্ড করা হইয়াছে। 2 পাউণ্ড সরণক্ষম ভার ব্যবহার করিয়া সর্বাপেক্ষা কত বড় এবং কত ছোট ভার ওজন করা যায়।

4. একটি সাধারণ তুলাদণ্ডে যে বিন্দু হইতে ভার ঝুলান হয় তাহা হইতে আলম্বের দূরত্ব $1\frac{1}{2}$ ইঞ্চি এবং সরণক্ষম ভার 8 আউন্স। 20 পা. ওজন করিতে যদি সরণক্ষম ভারকে 10 ইঞ্চি দূরে রাখিতে হয় তাহা হইলে 25 পা. ওজন করিতে ইহাকে কোথায় রাখিতে হইবে?

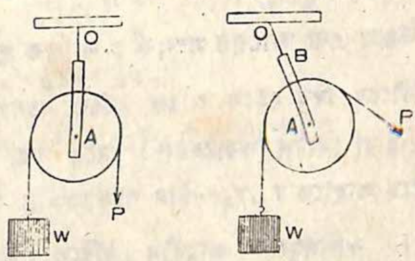
5. সাধারণ তুলাদণ্ডে দেখাও যে, যে-কোন দুই দাগের মধ্যে দূরত্ব নির্দেশিত ভারদ্বয়ের পার্থক্যের অনুপাতে।

6. যদি একটি সাধারণ তুলাদণ্ডে আলম্ব হইতে ভার-কেন্দ্রের দূরত্ব 2 ইঞ্চি, সরণক্ষম ভার 4 আউন্স এবং দণ্ডের ভার 2 পাউণ্ড হয়, ভারকেন্দ্র হইতে শূন্য অংশিত দাগের দূরত্ব নির্ণয় কর।

---

4. কপিকল
Pulleys

19-17. কপি (Pulley) একটি কাঠের অথবা কোন ধাতু-নির্মিত চাকা; ইহার পরিধিতে খাঁজ কাটা থাকে। এই খাঁজে একটি দড়ি গলাইয়া দেওয়া যায়। চাকাটি একটি অনুভূমিক অক্ষের চারিদিকে ঘুরিতে পারে; এই অক্ষ চাকার কেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়। অক্ষের দুই প্রান্ত ব্লক বা কুঁদো বলিয়া অভিহিত একটি কাঠের ফ্রেমে আটকানো থাকে। ব্লক যদি আবদ্ধ থাকে তাহা হইলে কপিটিকে আবদ্ধ বা অচর বলা হয়; ব্লক যদি সরণক্ষম হয় কপিটি চর (movable) বা গতিশীল। আবদ্ধ কপিতে দড়ির এক প্রান্তে ভার সংলগ্ন থাকে অন্যপ্রান্তে উদ্যম প্রয়োগ করিয়া ঐ ভার উত্তোলন করা হয়।

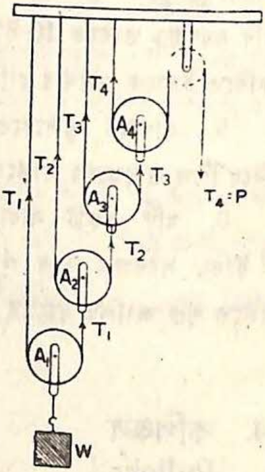


আমরা দড়ি ভারহীন এবং কপি মসৃণ মনে করিব। তাহা হইলে কপির উভয় দিকে দড়ির সর্বত্র টান এক হইবে।

আবদ্ধ একটি কপির সাহায্যে সুবিধা মত দিকে উদ্যম প্রয়োগ করিতে পারা যায়। ইহাতে যান্ত্রিক সুবিধা নাই। একাধিক কপি ব্যবহার করিয়া যান্ত্রিক সুবিধা পাওয়া যায়।

একাধিক কপির তিনটি বিভিন্ন প্রণালীর কপিকল আছে।

19-18. *প্রথম প্রণালীর কপিকল (First system of Pulleys)।
(পৃথক দড়ির দ্বারা যুক্ত) :



এই প্রণালীর কপিকলে যে-ভার উত্তোলন করিতে হইবে তাহা সর্বনিম্ন কপি হইতে ঝুলানো হয়। প্রত্যেক দড়ির একপ্রান্ত অবলম্বন-দণ্ডে সংযুক্ত থাকে এবং অপর প্রান্ত একটি কপির নীচ দিয়া গিয়া তাহার উপরের কপিতে সংলগ্ন থাকে। সকলের উপরের কপি ঘুরিয়া যে দড়ি গিয়াছে তাহার মুক্ত প্রান্তে উদ্যম প্রযুক্ত হয়।

সাধারণতঃ উদ্যম প্রয়োগের সুবিধার জন্য একটি আবদ্ধ কপির উপর দিয়া দড়িটি লইয়া গিয়া নিম্নাভিমুখে টানা হয়। আবদ্ধ কপিটিকে কপিকলের অন্তর্ভুক্ত একটি কপি বলিয়া ধরা হয় না।

উদ্যম এবং ভারের সম্পর্ক : যান্ত্রিক সুবিধা :

নীচের দিক্ হইতে আরম্ভ করিয়া সরণক্ষম কপিগুলিকে যথাক্রমে A_1, A_2....দ্বারা নির্দেশ করা হইল। মনে কর, ইহাদের ঘুরিয়া যে-সমস্ত দড়ি গিয়াছে তাহাতে T_1, T_2....টান পড়ে।

I. কপিসমূহ ভারহীন ধরিলে A_1, A_2....এইক্রমে কপিসমূহের সাম্যাবস্থার জন্য

$$2T_1 = W\ ;\quad \therefore\quad T_1 = \tfrac{1}{2}W.$$

$$2T_2 = T_1\ ;\quad \therefore\quad T_2 = \tfrac{1}{2}T_1 = \frac{1}{2^2}W.$$

$$2T_3 = T_2\ ;\quad \therefore\quad T_3 = \tfrac{1}{2}T_2 = \frac{1}{2^3}W.$$

$$2T_4 = T_3\ ;\quad \therefore\quad T_4 = \tfrac{1}{2}T_3 = \frac{1}{2^4}W.$$

আমাদের চিত্রে $T_4 = P \quad \therefore \quad P = \frac{1}{2^4}W.$

এইরূপভাবে n সংখ্যক কপি থাকিলে

$$P=\frac{1}{2^n}W. \quad \text{অথবা } W=2^n P.$$

$$\text{যান্ত্রিক সুবিধা}=\frac{W}{P}=2^n$$

দৃষ্টান্ত : যদি চারিটি কপি উঠানামা করিতে পারে তাহা হইলে এক পাউণ্ড-ভার বল 16 পাউণ্ড-ভারকে উত্তোলন করিতে পারে। উত্তোলিত ভার 80 পাউণ্ড হইলে উদ্যম $\frac{80}{16}=5$ পাউণ্ড।

II. কপিগুলির ভার নীচের দিক্ হইতে আরম্ভ করিয়া w_1, w_2........ হইলে,

$$2T_1=W+w_1 \quad \therefore \quad T_1=\tfrac{1}{2}W+\tfrac{1}{2}w_1$$

$$2T_2=T_1+w_2 \quad \therefore \quad T_2=\tfrac{1}{2}T_1+\tfrac{1}{2}w_2$$
$$=\frac{1}{2^2}W+\frac{1}{2^2}w_1+\tfrac{1}{2}w_2$$

$$2T_3=T_2+w_3 \quad \therefore \quad T_3=\tfrac{1}{2}T_2+\tfrac{1}{2}w_3$$
$$=\frac{1}{2^3}W+\frac{1}{2^3}w_1+\frac{1}{2^2}w_2+\tfrac{1}{2}w_3$$

$$2T_4=T_3+w_4 \quad \therefore \quad T_4=\tfrac{1}{2}T_3+\tfrac{1}{2}w_4$$
$$=\frac{1}{2^4}W+\frac{1}{2^4}w_1+\frac{1}{2^3}w_2+\frac{1}{2^2}w_3+\tfrac{1}{2}w_4.$$

এইরূপভাবে n সংখ্যক কপি থাকিলে

$$P=\frac{W}{2^n}+\frac{w_1}{2^n}+\frac{w_2}{2^{n-1}}+\cdots\cdots\cdots+\frac{w_n}{2}.$$

$$\text{বা} \quad 2^n P=W+w_1+2w_2+2^2w_3+\cdots+2^{n-1}w_n.$$

অনুসিদ্ধান্ত : যখন কপিগুলি সমান ভারের (প্রত্যেকের ভার w) তখন

$$2^n P=W+w(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})=W+(2^n-1)w$$

উদাহরণ 1. প্রথম প্রণালীর কপিকলে চারিটি সরণক্ষম কপির ভার যদি নীচেরটি হইতে আরম্ভ করিয়া 4, 3, 2, 1 পাউণ্ড হয় তাহা হইলে 10 পাউণ্ড ভারের উদ্যম কত ভার উঠাইতে পারে ?

$$2^4 P=W+w_1+2w_2+2^2w_3+2^3w_4.$$

$$16\times 10=W+4+2\times 3+4\times 2+8\times 1=W+26$$

$$\therefore \quad W=160-26=134 \text{ পাউণ্ড ভার।}$$

উদাহরণ 2. প্রথম প্রণালীর তিন কপিবিশিষ্ট কপিকলে প্রত্যেক কপির ভার সমান। 2 পাউণ্ড-ভার উদ্যম একটি ভার উত্তোলনে সক্ষম। চতুর্থ একটি কপি এখন ব্যবহার করিলে ঐ ভার $1\frac{1}{14}$ পাউণ্ড-ভার উদ্যমের সাহায্যে উত্তোলিত হইতে পারে। উত্তোলিত ভার এবং প্রত্যেক কপির ভার নির্ণয় কর।

মনে কর, উত্তোলিত ভার W এবং প্রত্যেক কপির ভার w, তাহা হইলে প্রথম ক্ষেত্রে

$$2^3 \times 2 = W + (2^3 - 1)w = W + 7w \qquad \cdots(1)$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $2^4 \times \frac{15}{14} = W + (2^4 - 1)w = W + 15w \cdots(2)$

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া $8w = 2^4(\frac{15}{14} - 1) = 16 \times \frac{1}{14}$

$\therefore \quad w = \frac{1}{7}$ পাউণ্ড ভার।

সমীকরণ (1)-এ w-এর মান স্থাপন করিয়া

$$16 = W + 1 \quad \therefore \quad W = 15 \text{ পাউণ্ড-ভার।}$$

উদাহরণ 3. প্রথম প্রণালীর একটি কপিকলে তিনটি সরণক্ষম কপি আছে। কপিগুলির ভার উচ্চতম কপি হইতে আরম্ভ করিয়া নীচের দিকে সমান্তর প্রগতিতে বাড়ে এবং P উদ্যম W রোধকে সাম্যাবস্থায় রাখিতে পারে। কপি তিনটি উল্টাভাবে সাজাইলে W উদ্যম P রোধকে সাম্যাবস্থায় রাখে, যদি কপি তিনটির মিলিত ভার W_1 হয়, তবে প্রমাণ কর যে $3(W+P) = 2W_1$।

মনে কর, উচ্চতম কপি হইতে আরম্ভ করিয়া কপি তিনটির ভার $\frac{W_1}{3} - x$, $\frac{W_1}{3}$ এবং $\frac{W_1}{3} + x$. তাহা হইলে

$$2^3 P = W + \frac{W_1}{3} + x + 2\frac{W_1}{3} + 2^2\left(\frac{W_1}{3} - x\right) \qquad \cdots(1)$$

এবং $2^3 W = P + \frac{W_1}{3} - x + 2\frac{W_1}{3} + 2^2\left(\frac{W_1}{3} + x\right) \qquad \cdots(2)$

যোগ করিয়া

$$8(P+W) = W + P + \frac{14W_1}{3} \quad \text{or} \quad 3(W+P) = 2W_1$$

উদাহরণ 4. প্রথম প্রণালীর কপিকলে চারিটি কপির সর্বনিম্ন কপি হইতে 80 পাউণ্ড ভারের একটি বালক ঝুলিতেছে। আবদ্ধ কপির উপর দিয়া যে দড়ি গিয়াছে তাহার প্রান্ত ধরিয়া সে নিজেকে সাম্যাবস্থায় রাখিয়াছে। প্রত্যেক কপির ভার যদি 6 পাউণ্ড হয়, সে কি পরিমাণ বল প্রয়োগ করিতেছে?

মনে কর, বালকটি P বল প্রয়োগ করিতেছে, তাহা হইলে রোধ

$= 80 - P$ পাউণ্ডভার।

এখানে উদ্যম P এবং রোধ $80 - P$

$$2^4 P = (80 - P) + 6(2^4 - 1)$$

অর্থাৎ $17P = 80 + 90 = 170 \quad \therefore \quad P = 10$ পাউণ্ড ভার।

*19-19. **কার্যতত্ত্ব প্রতিপাদন :** আমরা চারিটি কপিবিশিষ্ট কপিকল বিবেচনা করি। কপিগুলি ভারহীন মনে করিতে হইবে, তখন

$$P = \frac{1}{2^4} W.$$

যদি ভার x পরিমাণ দূরত্ব উত্থিত হয়, তাহা হইলে সর্বনিম্ন কপিরও x পরিমাণ সরণ হয়। A_1 এবং A_2 কপির মধ্যে দূরত্ব ঠিক রাখিতে A_2 কপি এই পরিমাণ উঠিবার কথা কিন্তু A_1 কপিসংলগ্ন দড়ি কপির খাঁজের ভিতর দিয়া x পরিমাণ গলিয়া যায়, ফলে A_2 কপি আরও x দূরত্ব উঠিয়া পড়ে অর্থাৎ A_1 কপির সরণ x হইলে দ্বিতীয় কপি A_2-র সরণ হয় $2x$; একই কারণে A_3 কপির সরণ $2 \times 2x$ বা $2^2 x$, A_4 কপির সরণ $2 \times 2^2 x$ বা $2^3 x$; অতএব উদ্যমের প্রয়োগ-বিন্দুর সরণ হয় $2^4 x$.

এখন, উদ্যমের দ্বারা কৃত কার্য $= P \times 2^4 x$

$= 2^4 P . x = Wx$

$=$ ভারের বিরুদ্ধে কৃত কার্য

অতএব কার্যতত্ত্ব প্রতিপাদিত হইল।

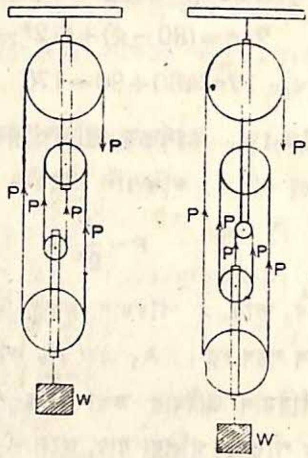
19-20. **দ্বিতীয় প্রণালীর কপিকল** (Second system of Pulleys) —একটি মাত্র দড়িযুক্ত কপিকল। ইহাই ব্যবহারের পক্ষে সমধিক উপযোগী।

এই প্রণালীর কপিকলে কপিসমূহ দুইটি পৃথক ব্লকে বা কুঁদোতে সংলগ্ন থাকে। উপরের ব্লক স্থির ; নীচের ব্লক উঠানামা করিতে পারে এবং ইহা হইতে ভার ঝুলানো হয়। একটি দড়ি প্রত্যেক কপি ঘুরিয়া যায়।

যদি উভয় ব্লকে সমান সংখ্যক কপি থাকে, তবে দড়ির একপ্রান্ত উপরের ব্লকে সংযুক্ত করা প্রয়োজন হয়।

দড়ি প্রথমে নীচের ব্লকের সর্বোচ্চ কপি ঘুরিয়া যায়, তারপর উপরের ব্লকের সর্বনিম্ন কপি ঘুরিয়া আবার নীচের ব্লকের দ্বিতীয় কপি ঘুরিয়া পরে উপরের ব্লকের দ্বিতীয় কপি ঘুরিয়া যায়। এইরূপে অন্যান্য কপি ঘুরিয়া যায়। দড়ির মুক্তপ্রান্তে উদ্যম প্রযুক্ত হয়।

উপরের ব্লকে নীচের ব্লক অপেক্ষা একটি কপি বেশী থাকিলে নীচের ব্লকে দড়ির একপ্রান্ত সংযুক্ত হয়। তারপর দড়ি উপরের ব্লকের সর্বনিম্ন কপির উপর দিয়া নেওয়া হয়। ইহা এখন নীচের ব্লকের সর্বোচ্চ কপি ঘুরিয়া আবার উপরের ব্লকের দ্বিতীয় কপির উপর দিয়া গিয়া নীচের ব্লকের দ্বিতীয় কপি ঘুরিয়া যায়। এইরূপে অন্যান্য কপি ঘুরিয়া যায়।



যদি উপরের ও নীচের ব্লকে মোট কপির সংখ্যা n হয় তবে নীচের ব্লক সংলগ্ন দড়ির অংশ n. যেহেতু একটি মাত্র দড়ি মসৃণ কপিসমূহের উপর দিয়া গিয়াছে, অতএব দড়ির প্রত্যেক অংশেই প্রযুক্ত উদ্যম P-এর সমান টান পড়ে; এবং নীচের ব্লকে উর্ধ্বাভিমুখে nP পরিমাণ বল ক্রিয়া করে।

যদি W ভার উত্তোলন করা হয় এবং কপিসহ নীচের ব্লকের ভার w হয়, তাহা হইলে সাম্যাবস্থায়

$$W + w = nP$$

উদাহরণ 1. এক দড়ির কপিকলে নীচের ব্লকের ভার 10 পাউণ্ড। নীচের ব্লকে অন্তত কতটি কপি থাকিলে 30 পাউণ্ডের কম উদ্যম প্রয়োগ করিয়া 150 পাউণ্ড ভার উত্তোলন করা যাইবে? উদ্যমের পরিমাণ নির্ণয় কর।

$150 + 10 = nP$ অর্থাৎ $nP = 160 \cdots\cdots (1)$

কিন্তু উদ্যম P, 30 পাউণ্ড ভারের অধিক নয়; অতএব n, $\frac{160}{30}$ বা $5\frac{1}{3}$ অপেক্ষা বেশী অর্থাৎ অন্তত 6. সুতরাং নীচের ব্লকে কপির সংখ্যা $=3$.

(1) সমীকরণে যখন $n = 6$, তখন $6P = 160$ $\therefore$ উদ্যম $= \frac{160}{6}$ $= 26\frac{2}{3}$ পা. ভার।

উদাহরণ 2. 120 পা. ভারের একজন লোক দ্বিতীয় প্রণালীর কপিকলের সাহায্যে 4 হন্দর ভার উঠাইতেছে। প্রত্যেক ব্লকে চারিটি কপি আছে। কপি ও নীচের ব্লকের ভার বাদ দিলে মাটির উপর লোকটির চাপ নির্ণয় কর।

লোকটির উপর কি কি বল ক্রিয়া করিতেছে দেখ।

(i) তাহার ভার 120 পা. নীচের দিকে

(ii) মাটির প্রতিক্রিয়া R উপর দিকে ; ইহা মাটির উপর লোকটির চাপের সমান ও বিপরীতমুখী।

(iii) দড়ির টান T উপর দিকে (ইহা সে দড়িতে যে-উদ্যম P প্রয়োগ করিতেছে তাহার সমান ও বিপরীতমুখী)।

$\therefore \quad 120 = R + T = R + P \cdots\cdots(1)$

কিন্তু $8P = 4 \times 28 \times 4$ পা.

অর্থাৎ $P = 56$ পা.

এখন, (1) সমীকরণ হইতে

$120 = R + 56$

$\therefore \quad R = 64$ পা. ভার।

উদাহরণ ৪. একটি দ্বিতীয় প্রণালীর কপিকলে দেখা গেল যে w পাউণ্ড ভার W ভারকে সাম্যাবস্থায় রাখে এবং w' পাউণ্ড-ভার W' ভারকে সাম্যাবস্থায় রাখে। কপির সংখ্যা এবং নীচের ব্লকের ভার নির্ণয় কর।

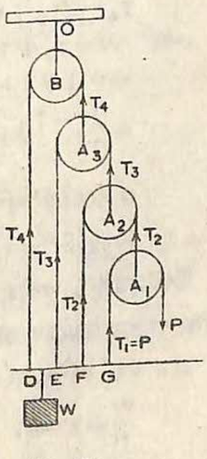
মনে কর, কপির সংখ্যা n এবং নীচের ব্লকের ভার x. তাহা হইলে

$$nw = W + x \cdots\cdots(1)$$
$$nw' = W' + x \cdots\cdots(2)$$

বিয়োগ করিয়া $n(w - w') = W - W' \quad \therefore \; n = \dfrac{W - W'}{w - w'}$

এখন (1) হইতে $x = nw - W = \dfrac{W - W'}{w - w'}w \quad W = \dfrac{Ww' - W'w}{w - w'}$.

18-21. *তৃতীয় প্রণালীর কপিকল (Third system of Pulleys) **:** সকল দড়িই বাধা বা ভারের সহিত সংলগ্ন।



তৃতীয় প্রণালীর কপিকলে পৃথক্ পৃথক্ দড়ির এক প্রান্ত একটি দণ্ডে সংলগ্ন থাকে এবং এই দণ্ড হইতে ভার ঝুলানো হয়। যে কোন দড়ি একটি কপির উপর দিয়া লইয়া গিয়া তাহার নীচের কপির সহিত সংযুক্ত করা হয়। সর্বনিম্ন কপি ঘুরিয়া যে-দড়ি গিয়াছে তাহার মুক্ত-প্রান্তে উদ্যম প্রয়োগ করা হয়। সর্বোচ্চ কপিটি উঠানামা করে না। এই কপিতে দড়ি সংলগ্ন করিয়া সমগ্র কপিকলটি ঝুলানো থাকে।

যান্ত্রিক সুবিধা :

মনে কর, নীচের দিক হইতে আরম্ভ করিয়া সরণক্ষম কপিগুলি A_1; A_2, A_3 ....ইত্যাদি।

এই কপিগুলির উপর দিয়া যে দড়ি গিয়াছে তাহাদের টান যথাক্রমে T_1, T_2, T_3....ইত্যাদি।

P যদি উদ্যম হয়, তাহা হইলে $T_1 = P$. এবং আমাদের চিত্রে

$W = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

(1) কপিসমূহ ভারহীন ধরিলে A_1, A_2, A_3......এই ক্রমে চর কপি সমূহের সাম্যাবস্থার জন্য

$$T_2 = 2T_1 = 2P$$
$$T_3 = 2T_2 = 2^2P.$$
$$T_4 = 2T_3 = 2^3P.$$
$$\therefore \quad W = P(1+2+2^2+2^3)$$
$$= P\frac{2^4-1}{2-1} = (2^4-1)P.$$

যদি এইরূপ n সংখ্যক কপি থাকে, তাহা হইলে

$$W = P\frac{2\ \ -1}{2-1} = (2^n-1)P$$

যান্ত্রিক সুবিধা $= \frac{W}{P} = 2^n - 1.$

*(2) নীচের দিক হইতে আরম্ভ করিয়া কপিগুলির ভার w_1, w_2, w_3.......হইলে

$$T_2 = 2T_1 + w_1 = 2P + w_1$$
$$T_3 = 2T_2 + w_2 = 2^2P + 2w_1 + w_2$$
$$T_4 = 2T_3 + w_3 = 2^3P + 2^2w_1 + 2w_2 + w_3.$$

এবং $W = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

$$= P(1+2+2^2+2^3) + w_1(1+2+2^2) + w_2(1+2) + w_3$$
$$= \frac{2^4-1}{2-1}P + \frac{2^3-1}{2-1}w_1 + \frac{2^2-1}{2-1}w_2 + w_3.$$

n সংখ্যক কপি থাকিলে

$$W = (2^n-1)P + (2^{n-1}-1)w_1 + \cdots\cdots + w_{n-1}$$

উদাহরণ 1. তৃতীয় প্রণালীর কপিকলে কত সংখ্যক ভারহীন কপি থাকিলে 6 কিলোগ্রাম উদ্যমের দ্বারা 90 কিলোগ্রাম ভার উত্তোলন সম্ভব হইবে?

মনে কর, কপির সংখ্যা n

$$\frac{W}{P} = 2^n - 1$$

$\therefore \quad \frac{90}{6} = 2^n - 1$ অথবা $2^n = 15 + 1 = 16 = 2^4$

$$\therefore \quad n = 4.$$

উদাহরণ 2. তৃতীয় প্রণালীর কপিকলে 3টি কপি আছে। সর্বনিম্ন কপির ভার 1 পাউণ্ড এবং তাহার উপরে দ্বিতীয় কপির ভার 2 পাউণ্ড। 75 পাউণ্ড ভার উত্তোলন করিতে হইলে কি পরিমাণ উদ্যমের প্রয়োজন হইবে?

$$W=(2^3-1)P+(2^2-1)w_1+w_2$$

$$\therefore\ 75=(2^3-1)P+3\times1+2$$

$(2^3-1)P=75-5$ অর্থাৎ $7P=70$

$\therefore\ P=10$ পাউণ্ড ভার।

উদাহরণ 3. তৃতীয় প্রণালীর কপিকলের সাহায্যে 126 পাউণ্ড ভারের একজন লোক ভূমির উপর দাঁড়াইয়া 106 পাউণ্ড ভারের একটি বস্তুকে সাম্যাবস্থায় রাখিয়াছে। যদি কপির সংখ্যা চার হয় এবং সরণক্ষম কপি তিনটির নীচের দিক্ হইতে ভার যথাক্রমে 1, 2 এবং 3 পাউণ্ড হয়, তবে ভূমির উপর লোকটির চাপ নির্ণয় কর।

মনে কর, ভূমির উপর লোকের চাপ R.

লোকটির উপর তিনটি বল ক্রিয়া করিতেছে

(1) নিম্নাভিমুখে তাহার ভার 126 পা.

(2) উর্ধ্বাভিমুখে ভূমির উপর চাপের বিপরীত প্রতিক্রিয়া R.

(3) উর্ধ্বাভিমুখে দড়ির টান; ইহা উদ্যম P-এর সমান।

$\therefore\ 126=R+P$ অথবা $R=126-P$

কিন্তু এখানে $W=(2^4-1)P+(2^3-1)w_1+(2^2-1)w_2+(2-1)w_3$

অর্থাৎ $106=15P+7\times1+3\times2+3$

$15P=90\ \therefore\ P=6$ পাউণ্ড-ভার

$\therefore\ R=126-6=120$ পাউণ্ড-ভার

সুতরাং ভূমির উপর লোকটির চাপ $=120$ পাউণ্ড ভার।

19-22. ইহা লক্ষ্য করা যায় যে এই প্রণালীর কপিকলে কোন প্রদত্তভার সাম্যাবস্থায় রাখিবার জন্য কপির ভার যত অধিক হইবে ততই কম উদ্যমের প্রয়োজন হয়। কপির ভার উদ্যমের সহায়ক। কপির ভার এমনভাবে লওয়া যায় যে বিনা উদ্যমেই একটি ভার সাম্যাবস্থায় রাখা সম্ভব।

যেমন ধর, তিনটি সমানভারের গতিশীল কপি থাকিলে

$$W=(2^4-1)P+(2^3-1)w+(2^2-1)w+(2-1)w$$
$$=(2^4-1)P+11w$$

যদি $11w = W$ হয়, তাহা হইলে $P=0$ অর্থাৎ উদ্যমের প্রয়োজন নাই।

এই প্রণালীর কপি ভার উত্তোলনের জন্য পরিকল্পিত হয় নাই। এই উদ্দেশ্যে ব্যবহৃত হইলে দেখা যায় যে শীঘ্রই দড়িসমূহ জড়াইয়া গিয়া কপিকল কার্যের অনুপযোগী হইয়া পড়ে। খুব জোরে ক্ষণস্থায়ী টান দিবার জন্য ইহা ব্যবহার করা যায়।

তৃতীয় শ্রেণীর কপিকলে দণ্ডের যে-বিন্দু হইতে ভার ঝুলানো হয় সেই বিন্দু ঠিকমত না লইলে দণ্ড অনুভূমিক থাকিবে না। এই বিন্দু সমান্তরাল বলের কেন্দ্র নির্ণয়ের প্রণালী হইতে অনায়াসে পাওয়া যায়।

যেমন ধর, যদি 3টি ভারহীন চর কপি থাকে এবং দণ্ড ভারহীন হয় আর দড়ি চারিটি পরস্পর হইতে a দূরত্ব অন্তর থাকে তাহা হইলে যে-বিন্দু X হইতে ভার ঝুলাইতে হইবে তাহা নিম্ন উপায়ে পাই,

$$DX = \frac{T_4 \times 0 + T_3 \times a + T_2 \times 2a + T_1 \times 3a}{T_4 + T_3 + T_2 + T_1}$$

$$= \frac{4P.a + 2P.2a + P.3a}{8P + 4P + 2P + P} = \frac{11}{15}a.$$

প্রশ্নমালা 17(ঘ)

1. নিম্নলিখিত প্রশ্ন তিনটিতে কপিসমূহ ভারহীন; n কপির সংখ্যা, W ভার এবং P উদ্যম (প্রথম প্রণালীর কপিকল)

(1) $n=4$, $P=10$ কিলোগ্রাম; W নির্ণয় কর।

(2) $n=4$, $W=100$ পা. ভার; P নির্ণয় কর।

(3) $W=200$ কিলোগ্রাম, $P=25$ কিলোগ্রাম; n নির্ণয় কর।

2. (প্রথম প্রণালীর কপিকল) নিম্নলিখিত প্রশ্ন তিনটিতে, প্রত্যেক কপির ভার w, n কপির সংখ্যা, W ভার এবং P উদ্যম।

(1) $n=4$, $w=2$ পা. ভার, $W=50$ পা. ভার; P নির্ণয় কর।

(2) $n=3$. $P=2$ কিলোগ্রাম, $w=1$ কিলোগ্রাম; W নির্ণয় কর।

(3) $n=5$, $W=258$ কিলোগ্রাম, $P=10$ কিলোগ্রাম; w নির্ণয় কর।

3. (তৃতীয় প্রণালীর কপিকল) নিম্নলিখিত প্রশ্ন তিনটিতে কপি ভারহীন, n কপির সংখ্যা, W ভার এবং P উদ্যম।

(1) $n=4$, P=1 পা. ভার ; W নির্ণয় কর।

(2) $n=5$, W=62 কিলোগ্রাম, P নির্ণয় কর।

(3) W=120 কিলোগ্রাম, P=8 কিলোগ্রাম ; n নির্ণয় কর।

4. (তৃতীয় প্রণালীর কপিকল) নিম্নলিখিত প্রশ্ন তিনটিতে প্রত্যেক কপির ভার w, n কপির সংখ্যা, W ভার এবং P উদ্যম।

(1) $n=4$, $w=1$ পা. ভার, P=2 পা. ভার : W নির্ণয় কর।

(2) $n=3$, $w=\frac{1}{2}$ পা. ভার. W=72 পা. ভার ; P নির্ণয় কর।

(3) $n=5$, P=2 কিলোগ্রাম, W=88 কি. গ্রা. ; W নির্ণয় কর।

5. প্রথম প্রণালীর কপিকলে চারিটি কপি থাকিলে যান্ত্রিক সুবিধা নির্ণয় কর।

6. প্রথম প্রণালীর কপিকলে চারিটি কপি আছে, যদি ইহাদের ভার সর্বনিম্ন কপি হইতে আরম্ভ করিয়া যথাক্রমে 4, 3, 2 এবং 1 পাউণ্ড হয়, তাহা হইলে 4 পাউণ্ড উদ্যমের দ্বারা কত ভার উত্তোলন সম্ভব ?

7. তৃতীয় প্রণালীর কপিকলে তিনটি সরণক্ষম কপি থাকিলে যান্ত্রিক সুবিধা নির্ণয় কর।

8. তৃতীয় প্রণালীর কপিকলে তিনটি সরণক্ষম কপি আছে ; ইহাদের ভার সর্বনিম্ন কপি হইতে আরম্ভ করিয়া যথাক্রমে 1, 2 এবং 3 পাউণ্ড। 8 পাউণ্ড উদ্যমের দ্বারা কত ভার উত্তোলন সম্ভব ?

9. প্রথম প্রণালীর কপিকলে তিনটি কপি থাকিলে এবং তাহাদের ভার সর্বনিম্ন কপি হইতে আরম্ভ করিয়া যথাক্রমে 5, 4 এবং 3 পাউণ্ড হইলে, 50 পাউণ্ড উদ্যমের দ্বারা কত ভার উত্তোলন সম্ভব ?

10. দ্বিতীয় প্রণালীর কপিকলে নীচের ব্লকে চারিটি কপি আছে, ইহার ভার 20 পাউণ্ড এবং দড়ির একপ্রান্ত নীচের ব্লকে যুক্ত। 10 পাউণ্ড ভার উদ্যমের সাহায্যে কত ভার উত্তোলন সম্ভব ?

11. দ্বিতীয় প্রণালীর কপিকলে নীচের ব্লকে একটি ঝুড়ি ঝুলানো আছে। ঝুড়িতে একজন লোক বসিয়া দড়ির মুক্ত প্রান্ত ধরিয়া টানিয়া ঝুড়ি সহ সাম্যাবস্থায় আছে। যদি ঝুড়ি সহ লোকটির ভার W হয়, দড়ি উল্লম্বভাবে আছে মনে করিলে লোকটিকে কি পরিমাণ বলে টানিতে হয় ?

[**সঙ্কেত :** P যদি প্রযুক্ত উদ্যম হয় তাহা হইলে বাধা=W−P এবং W−P=nP, $P=\frac{W}{n+1}$]

12. প্রথম প্রণালীর কপিকলে চারিটি কপির সর্বনিম্ন কপি হইতে 156 পাউণ্ড ভারের একজন লোক ঝুলিতেছে। আবদ্ধ কপির উপর দিয়া যে দড়ি গিয়াছে তাহার প্রান্ত ধরিয়া টানিয়া সে নিজেকে সাম্যাবস্থায় রাখিয়াছে। প্রত্যেক কপির ভার যদি 10 পাউণ্ড হয়, সে কি পরিমাণ বল প্রয়োগ করিতেছে ?

13 যদি তৃতীয় প্রণালীর কপিকলে চারিটি ভারহীন কপি ঘুরিয়া যে চারিটি দড়ি গিয়াছে তাহারা 6 সে. মি. অন্তর একটি ভারহীন দণ্ডে যুক্ত হয় তাহা হইলে দণ্ডের কোন্ বিন্দু হইতে ভার ঝুলাইলে দণ্ডটি অনুভূমিক থাকিবে ?

14. যে প্রণালীর কপিকলে প্রত্যেক দড়ি ভার বহনকারী দণ্ডে সংযুক্ত তাহাতে প্রত্যেক কপির ব্যাস 7 সে. মি. হইলে এবং তিনটি ভারহীন কপি থাকিলে কোন্ বিন্দু হইতে ভার বুঝাইলে দণ্ডটি অনুভূমিক থাকিবে ?

15. দ্বিতীয় প্রণালীর কপিকলে 6 পাউণ্ড উদ্যম 28 পাউণ্ড ভারকে এবং 8 পাউণ্ড উদ্যম 42 পাউণ্ড ভারকে সাম্যাবস্থায় রাখিতে পারে। দুই ব্লকে কপির সংখ্যা এবং নীচের ব্লকের ভার নির্ণয় কর। [বারাণসী 1948]

16. একজন লোকের ভার 154 পাউণ্ড ; সে যে প্রণালীর কপিকলে একটিমাত্র দড়ি সকল কপি ঘুরিয়া যায় তাহার সাহায্যে 3 হন্দর ভার উঠাইতেছে। প্রত্যেক ব্লকে চারিটি কপি আছে এবং দড়ি উপরের ব্লকে যুক্ত হইয়াছে। কপিগুলি ভারহীন মনে করিলে যদি লোকটি উল্লম্ব নীচের দিকে টানে তাহা হইলে মাটির উপর তাহার চাপ নির্ণয় কর। [ক. বি. 1942]

17. প্রথম প্রণালীর কপিকলে তিনটি কপি আছে ; উদ্যম ও ভারের সমষ্টি 90 পাউণ্ড। যদি কপিগুলি ভারহীন হয়, উদ্যম নির্ণয় কর। [ক. বি 1947]

18. তৃতীয় প্রণালীর কপিকলে যদি যান্ত্রিক সুবিধা 127 হয়, এবং কপি সমূহ ভারহীন হয় তাহা হইলে কপির সংখ্যা নির্ণয় কর। [ক. বি 1952]

19 10 স্টোন ভারের একজন লোক এক দড়িবিশিষ্ট কপিকলের সাহায্যে 6 হন্দর ভার উঠায়। প্রত্যেক ব্লকে ছয়টি কপি আছে। মাটির উপর লোকটির চাপ নির্ণয় কর। যে দণ্ড হইতে কপিকল ঝুলানো হইয়াছে তাহার উপর পীড়নের (stress) পরিমাণ নির্ণয় কর। [B. E. 1936]

---

5. নততল

Inclined Plane

19-23. একটি দৃঢ় সমতল অনুভূমিক তলের সহিত নতি করিয়া থাকিলে তাহা যন্ত্ররূপে ব্যবহৃত হইতে পারে, ভারী বস্তুকে সহজে উপরে উঠাইবার জন্য ইহার ব্যবহার হয়।

এই পরিচ্ছেদে আমরা নততলকে মসৃণ মনে করিব সুতরাং নততল ও তাহার উপর রক্ষিত বস্তুর প্রতিক্রিয়া নততলের লম্বাভিমুখে।

অধিকন্তু, যেহেতু ইহা দৃঢ় অতএব ইহা যে-কোন বৃহৎ প্রতিক্রিয়া উৎপাদন করিতে সক্ষম।

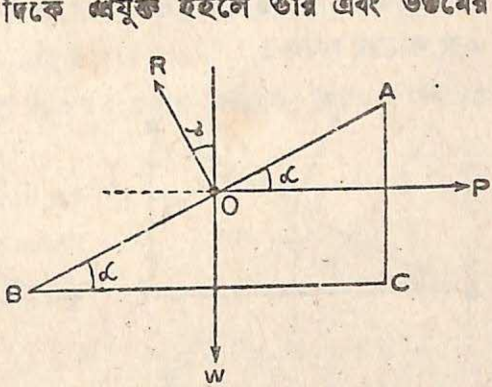
19-24. একটি প্রদত্ত ভারের বস্তু নততলে রক্ষিত হইয়াছে ; উদ্যম এবং ভারের সম্বন্ধ নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, বস্তুর ভার W, ইহাকে স্থিরাবস্থায় রাখিবার জন্য P উদ্যম প্রয়োগ করা হয় এবং তলের প্রতিক্রিয়া R ; তলের নতি α।

1. উদ্যম অনুভূমিক দিকে প্রযুক্ত হইলে ভার এবং উদ্যমের সম্বন্ধ :

মনে কর, ABC নততলের O বিন্দুতে W ভারের বস্তু অনুভূমিক বল P-র দ্বারা স্থিরাবস্থায় আছে।

[AB = দৈর্ঘ্য, AC = উচ্চতা, BC = ভূমি।]



[এখানে P বলে বস্তুটিকে অনুভূমিক দিতে ঠেলিতে হয় অথবা O-বিন্দুর ভিতর দিয়া সরু ছেদা কল্পনা করিয়া P বলে দড়ির সাহায্যে অনুভূমিক দিকে টানা হইতেছে মনে করিতে পারি।]

বস্তুটি নিম্নলিখিত তিনটি বলের দ্বারা সাম্যাবস্থায় আছে।

(i) বস্তুর ভার W উল্লম্বভাবে নিম্নাভিমুখে সুতরাং BC-র লম্বাভিমুখে,

(ii) প্রযুক্ত অনুভূমিক উদ্যম P, CA রেখার লম্বাভিমুখে,

(iii) মসৃণ তলের প্রতিক্রিয়া R, AB রেখার লম্বাভিমুখে।

যেহেতু ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহু CA, AB, BC যথাক্রমে P, R, এবং W বলের লম্বাভিমুখে (ABC একটি লম্বাভিমুখী বলত্রিভুজ)

অতএব $\frac{P}{CA}=\frac{R}{AB}=\frac{W}{BC}$.

ইহা হইতে $P=W\times\frac{CA}{BC}=W\times\frac{\text{নততলের উচ্চতা}}{\text{নততলের ভূমি}}\ (=W\tan\alpha)$

$$R=W\times\frac{AB}{BC}=W\times\frac{\text{নততলের দৈর্ঘ্য}}{\text{নততলের ভূমি}}(=W\sec\alpha).$$

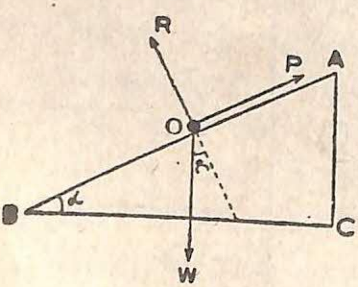
যান্ত্রিক সুবিধা $=\frac{W}{P}=\frac{\textbf{নততলের ভূমি}}{\textbf{নততলের উচ্চতা}}$

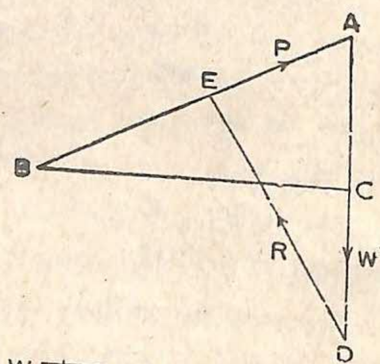
প্রকারান্তর : উল্লম্বদিকে এবং অনুভূমিক দিকে বল তিনটিকে বিশ্লেষণ করিয়া

$$W=R\cos\alpha\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$P=R\sin\alpha\cdots\cdots\cdots(2)$$

ভাগ করিয়া $\frac{W}{P}=\cot\alpha=\frac{\text{নততলের ভূমি}}{\text{নততলের উচ্চতা}}$

II. উভয় তলের সমান্তরালভাবে উপরদিকে প্রযুক্ত হইলে, উদ্যম এবং ভারের সম্বন্ধ :





মনে করে, ABC নততলের O বিন্দুতে W ভারের বস্তু নততলের সমান্তরাল P বলের দ্বারা স্থিরাবস্থায় আছে।

বস্তুটি নিম্নলিখিত তিনটি বলের ক্রিয়ার ফলে সাম্যাবস্থায় আছে।

(i) উল্লম্ব নিম্নাভিমুখে বস্তুর ভার W,

(ii) BA রেখার দিকে উদ্যম P,

(iii) BA-র লম্বাভিমুখে নততলের প্রতিক্রিয়া R.

AC-কে D পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন AD=AB হয় ; AB রেখার উপর DE লম্ব অঙ্কিত কর। এখন ADE এবং ABC ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব DE=BC, EA=AC.

এখন P, W, R বলত্রয় যথাক্রমে EAD ত্রিভুজের EA, AD এবং DE বাহুর সমান্তরাল। সুতরাং বলের ত্রিভুজ সূত্র অনুসারে,

$$\frac{P}{EA}=\frac{R}{DE}=\frac{W}{AD} \text{ অর্থাৎ } \frac{P}{AC}=\frac{R}{BC}=\frac{W}{AB}.$$

ইহা হইতে $\frac{P}{h}=\frac{R}{b}=\frac{W}{l}$

(l, h এবং b যথাক্রমে নততলের দৈর্ঘ্য, উচ্চতা এবং ভূমি)

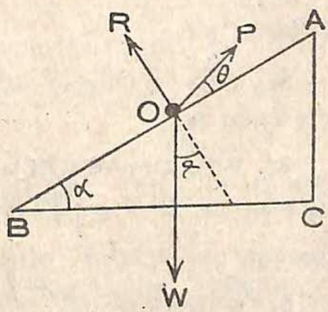
$$\therefore \quad P=W\times\frac{\text{নততলের উচ্চতা}}{\text{নততলের দৈর্ঘ্য}}=(W\sin\alpha),$$

$$R=W\times\frac{\text{নততলের ভূমি}}{\text{নততলের দৈর্ঘ্য}}=(W\cos\alpha)\text{।}$$

যান্ত্রিক সুবিধা $=\frac{W}{P}=\frac{\text{নততলের দৈর্ঘ্য}}{\text{নততলের উচ্চতা}}$.

প্রকারান্তর : তলের সমান্তরাল দিকে এবং লম্বাভিমুখে বল তিনটিকে বিশ্লেষণ করিয়া, $P=W\sin\alpha$ এবং $R=W\cos\alpha$

III উত্তম নততলের সহিত θ কোণ করিলে, উত্তম ও ভারের সম্বন্ধ :



মনে কর, ABC নততলের O বিন্দুতে W ভারের বস্তু নততলের সহিত θ কোণে প্রযুক্ত P উত্তমের দ্বারা স্থিরাবস্থায় আছে।

ল্যামির সূত্র অনুসারে,

$$\frac{P}{\sin WOR}=\frac{R}{\sin POW}=\frac{W}{\sin ROP}$$

অথবা, $$\frac{P}{\sin(180^\circ-\alpha)}=\frac{R}{\sin(90^\circ+\theta+\alpha)}=\frac{W}{\sin(90^\circ-\theta)}.$$

অথবা, $$\frac{P}{\sin\alpha}=\frac{R}{\cos(\theta+\alpha)}=\frac{W}{\cos\theta}$$

$$\therefore \quad P=W\times\frac{\sin\alpha}{\cos\theta}, \qquad R=W\times\frac{\cos(\theta+\alpha)}{\cos\theta},$$

দ্রষ্টব্য ঃ এই প্রশ্নে $\theta=0$ করিলে (II) প্রশ্নের এবং $\theta=-\alpha$ করিয়া (I) প্রশ্নের সমাধান পাওয়া যায়।

লক্ষ্য কর, অপর দুই ক্ষেত্রেও ল্যামির সূত্র প্রয়োগ করা যায়।

প্রশ্নমালা 17(ঙ)

1. অনুভূমিক দিকে কি উদ্যম প্রয়োগ করিলে নিম্নলিখিত বস্তুগুলি প্রদত্ত নততলে স্থিরাবস্থায় থাকিবে ?

(i) নততলের দৈর্ঘ্য 20 ফুট ; উচ্চতা 12 ফুট ; বস্তুর ভার 16 পাউণ্ড।

(ii) নততলের উচ্চতা 6 ফুট ; ভূমি 32 ফুট ; বস্তুর ভার 96 পাউণ্ড।

(iii) নততলের উচ্চতা 13 মিটার ; দৈর্ঘ্য 85 মিটার বস্তুর ভার 168 কিলোগ্রাম।

2. প্রথম প্রশ্নে প্রত্যেক ভারকে নততলের তলা হইতে শীর্ষে উঠাইতে কত কার্য সাধিত হয় ?

3. তলের সমান্তরালভাবে উপরদিকে কি উদ্যম প্রয়োগ করিলে নিম্নলিখিত বস্তুগুলি প্রদত্ত নততলে স্থিরাবস্থায় থাকিবে ?

(i) নততলের নতি 13 তে 5, দৈর্ঘ্য 65 ফুট ; বস্তুর ভার 130 পাউণ্ড।

(ii) নততলের উচ্চতা 7 ফুট, ভূমি 24 ফুট ; বস্তুর ভার 100 পাউণ্ড।

(iii) নততলের উচ্চতা 20 সে. মি. ; দৈর্ঘ্য 50 সে. মি., বস্তুর ভার 1 কিলোগ্রাম।

4. তৃতীয় প্রশ্নে প্রত্যেক ভার নততলের তলা হইতে শীর্ষে উঠাইতে কত কার্য সাধিত হয় ?

5. একটি মসৃণ নততলের উচ্চতা 6 ফুট এবং দৈর্ঘ্য 10 ফুট ; কত পরিমাণ বল অনুভূমিক দিকে প্রযুক্ত হইলে 40 পাউণ্ড ভারের বস্তুকে তলের উপর স্থিরাবস্থায় রাখা যাইবে ? তলের উপর কত চাপ পড়ে ?

6. একটি বস্তুকে এক নততলে, তল বরাবর উপর দিকে বস্তুর ভারের অর্ধেক পরিমাণ বল প্রয়োগ করিয়া স্থিরাবস্থায় রাখা হইয়াছে। তলের নতি নির্ণয় কর।

7. 60° নতিবিশিষ্ট নততলের উপর একটি বস্তু রাখিয়া অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণ করিয়া বল প্রয়োগ করিয়া ইহাকে স্থিরাবস্থায় রাখা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে উদ্যম এবং প্রতিক্রিয়া প্রত্যেকেই বস্তুর ভারের সমান।

Miscellaneous Questions

বিবিধ প্রশ্ন

(A)

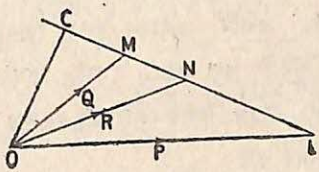
1. O বিন্দুতে ক্রিয়মাণ P, Q বলের লব্ধি R ; একটি সরলরেখা ইহাদের ক্রিয়ারেখাকে L, M, N বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে

$$\frac{P}{OL}+\frac{Q}{OM}=\frac{R}{ON}$$

[সংকেত : O হইতে প্রদত্ত ছেদকের উপর OC লম্ব অঙ্কিত কর এবং OC-এর দিকে বিশ্লেষণ কর ; তাহা হইলে

$P\cos LOC+Q\cos MOC$

$=R\cos NOC$



অর্থাৎ $P\frac{OC}{OL}+Q\frac{OC}{OM}=\frac{R.OC}{ON}$

$\therefore\ \frac{P}{OL}+\frac{Q}{OM}=\frac{R}{ON}$]

2. একটি বিন্দুতে চারিটি সমান বল প্রযুক্ত হইয়াছে ; প্রথম বল দ্বিতীয়ের লম্বাভিমুখে ; তাহাদের লব্ধি তৃতীয় বলের লম্বাভিমুখে, এবং প্রথম তিন বলের লব্ধি চতুর্থের লম্বাভিমুখে। লব্ধি নির্ণয় কর।

3. একটি অনুভূমিক সরলরেখাস্থ দুই বিন্দুতে সংলগ্ন দুইটি সমান সূতার সাহায্যে একটি ভার ঝুলান হইয়াছে। যদি সূতা দুইটির দৈর্ঘ্য বর্ধিত করা হয় দেখাও যে তাঁহাদের টান হ্রাস পায়।

4. D বিন্দু ABC ত্রিভুজের ভূমি BC-র মধ্যবিন্দু ; দেখাও যে AB এবং AC-র লব্ধি AB এবং BD-র লব্ধির দ্বিগুণ।

5. D বিন্দু ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু ; প্রমাণ কর যে AD এবং AC বাহুর দ্বারা প্রদর্শিত বলের লব্ধির মান $\sqrt{7}$AD-র দ্বারা প্রদর্শিত হয়।

6. একটি ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু যথাক্রমে D, E এবং F বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে ; DA, EB এবং FC দ্বারা প্রদর্শিত বলের লব্ধি নির্ণয় কর।

7. এক বিন্দুতে ক্রিয়মাণ দুইটি বল যদি একটি সামান্তরিকের দুই কর্ণের দ্বারা প্রদর্শিত হয়, তাহাদের লব্ধি সামান্তরিকের একটি বাহুর দ্বিগুণ দ্বারা প্রদর্শিত হইবে।

8. ABCD একটি বর্গক্ষেত্র ; AB, CB, AD, DC বরাবর সমান বল P ক্রিয়া করে। লব্ধি নির্ণয় কর।

9. একটি বিন্দুতে 1, 2, 3, 4-এর অনুপাতে বল যথাক্রমে একটি সামান্তরিকের বাহুর সমান্তরাল দিকে ক্রিয়া করে। তাহাদের লব্ধির মান নির্ণয় কর।

10. ABCD একটি চতুর্ভুজ। একটি বিন্দুতে ক্রিয়মাণ চারিটি বলের মান ও দিক্ AB, AD, BC এবং DC-র দ্বারা প্রদর্শিত হইলে তাহাদের লব্ধির মান এবং দিক্ নির্ণয় কর।

11. একটি কণার উপর তিনটি 1, 2 এবং $\sqrt{3}$ ক্রিয়া করিতেছে। প্রথম দুইটি বল ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB এবং AC বাহু বরাবর এবং তৃতীয় বল BC বাহুর উপর লম্ব DA বরাবর ক্রিয়া করে। ইহাদের লব্ধির দিক্ এবং মান নির্ণয় কর।

(B)

12. দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল P এবং Q একটি দৃঢ় বস্তুর A এবং B বিন্দুতে ক্রিয়া করে

(i) যদি Q-কে $\frac{P^2}{Q}$তে পরিবর্তিত করা হয় দেখাও যে, লব্ধির ক্রিয়া-রেখা, বল দুইটি পরিবর্তিত করিলে যে ক্রিয়া রেখা হয় তাহার সহিত একই।

(ii) যদি P এবং Q-এর অবস্থান পরিবর্তন করা হয়, দেখাও যে লব্ধির প্রয়োগবিন্দু AB বরাবর d পরিমাণ অপসৃত হয় যেন

$$d=\frac{P-Q}{P+Q}AB$$

13. 10পা. এবং 15পা ভারের দুইটি সমান্তরাল বলের লব্ধির ক্রিয়ারেখা ক্ষুদ্রতর বল হইতে 20 ফুট দূরে। দুইটি বলের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

14. তিনটি সমান্তরাল বল P, Q এবং R সাম্যাবস্থায় আছে। একটি সরলরেখা ইহাদের ক্রিয়া রেখাকে A, B এবং C বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে,

$$\frac{P}{BC}=\frac{Q}{CA}=\frac{R}{AB}$$

15. একটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুতে তিনটি সমান্তরাল বল P, Q এবং R ক্রিয়া করে। যদি তাহাদের লব্ধি ভর-কেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়, দেখাও যে, P=Q=R.

(C)

16. একজন বয়স্ক লোক এবং একটি বালক $5\frac{1}{2}$ ফুট দীর্ঘ, 20 পাউণ্ড ভারের একটি দণ্ডের সাহায্যে 55 পা. ভর বহন করে। ভরটি কোন্ স্থানে রাখিলে বয়স্ক লোক সমগ্রভাবে বালকের দ্বিগুণ ভার বহন করিবে?

17. একট লৌহদণ্ডের ভার প্রতি ফুটে 4 পাউণ্ড। যখন ইহার এক প্রান্ত হইতে 5 পাউণ্ড ভার ঝুলান হয়, তখন দণ্ডটি ঐ প্রান্ত হইতে 2 ফুট দূরের একটি বিন্দুতে সুস্থিত হয়। দণ্ডটির দৈর্ঘ্য কত?

18. AB একটি বৃত্তের ব্যাস এবং BP, BQ দুইটি পরস্পর লম্বাভিমুখী জ্যা। দেখাও যে A বিন্দুর চারিদিকে BP এবং BQ-র দ্বারা প্রদর্শিত বলের ভ্রামক সমান।

19. তিনটি বল P, Q, R একটি ত্রিভুজ ABC-ক্রমানুসারে গৃহীত তিনটি বাহু BC, CA, AB বরাবর ক্রিয়া করে; যদি তাহাদের ক্রিয়ারেখা ভরকেন্দ্রের ভিতর দিয়া যায়, দেখাও যে,

$$\frac{P}{a}+\frac{Q}{b}+\frac{R}{c}=0$$

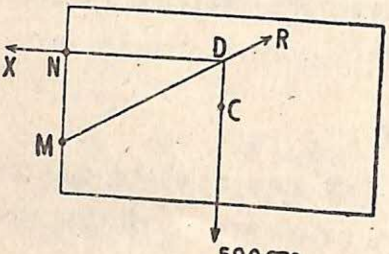
(D)

20. AB দণ্ডের A প্রান্ত কজায় সংযুক্ত; একটি দড়ি BC ইহার সঙ্গে 45° নতি করিয়া ইহাকে অনুভূমিক অবস্থায় রাখিয়াছে। ইহার B বিন্দু হইতে 10 পাউণ্ড ভার ঝুলান আছে। দড়ির টান এবং কজাতে বল নির্ণয় কর। দণ্ডের ভার ধর্তব্য নয়।

21. একটি পেরেক হইতে দড়ির সাহায্যে 20 পা. ভার ঝুলান হইয়াছে; আর একটি দড়ি প্রথম দড়ির K বিন্দুতে বাঁধিয়া অনুভূমিক দিকে টানা

হইতেছে। ইহাতে কি বল প্রয়োগ করিলে PK দড়ি উল্লম্বের সঙ্গে 60° কোণ করিয়া থাকিবে? পেরেকের উপর কি বল ক্রিয়া করিবে তাহাও নির্ণয় কর।

22. একটি কবাটের কব্জা দুইটি 4 ফুট তফাতে আছে; কবাট 10 ফুট চওড়া এবং ইহার ভার 500 পাউণ্ড। যদি নীচের কব্জা সমস্ত ভার বহন করে তাহা হইলে উপরের কব্জাতে কি চাপ পড়ে?



সমাধান : উপরের কব্জাতে কোন ভার পড়ে না বলিয়া উপরের কব্জাতে বল অনুভূমিক। দরজার উপর ক্রিয়মাণ বল

(1) দরজার ভার 500 পা. দরজার কেন্দ্র C-র ভিতর দিয়া

(2) N কব্জার প্রতিক্রিয়া X অনুভূমিক

(3) M কব্জার প্রতিক্রিয়া R

যেহেতু তিনটি বলের সাম্যাবস্থা, অতএব তিনটি বল এক বিন্দুর ভিতর দিয়া যাইবে। ভার 500 এবং উপরের কব্জার প্রতিক্রিয়া D বিন্দুতে ছেদ করে; অতএব R-এর ক্রিয়া রেখা D বিন্দুগামী

X নির্ণয় করিবার জন্য M বিন্দুর চারিদিকে ভ্রামক লই

$4X = 500 \times 5 \quad \therefore \quad X = \frac{500 \times 5}{4} = 625$ পা. ভার।

23. W ভারের এবং r ব্যাসার্ধের একটি গাড়ীর চাকার কেন্দ্র অনুভূমিক F বল প্রয়োগ করিয়া উহাকে h উচ্চতার প্রতিবন্ধকের উপর দিয়া টানিয়া পার করিতে হইলে প্রমাণ কর যে F-এর পরিমাণ $\frac{W\sqrt{2rh - h^2}}{r-h}$ অপেক্ষা সামান্য অধিক হইতে হইবে।

24. 40 পা. ভারের একটি ছবির উপর ও নীচ প্রান্ত অনুভূমিকভাবে ঝুলান হইয়াছে। উপরের প্রান্তের দুই কোণে দড়ি বাঁধিয়া দড়িটি একটি পেরেকের উপর দিয়া নেওয়া হইয়াছে। যদি পেরেকের দুই দিকের দড়ির মধ্যবর্তী কোণ 60° হয় তাহা হইলে দড়িতে টান পাউণ্ডভারে নির্ণয় কর।

(E)

25. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজাকৃতি একটি সমভারের পাতের সমান বাহু দুইটির প্রত্যেকে 5 ফুট দীর্ঘ এবং ইহার ভূমির দৈর্ঘ্য 8 ফুট; ইহার ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

যদি পাতের ভার 5 পাউণ্ড এবং শীর্ষবিন্দুতে 10 পাউণ্ডভার ঝুলান হয় তাহা হইলে মিলিত ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

26. একটি ত্রিভুজাকৃতি পাতের বাহুগুলির দৈর্ঘ্য 6, 8 এবং 10 ফুট; দীর্ঘতম বাহু হইতে ভারকেন্দ্রের দূরত্ব নির্ণয় কর।

27. 5, 6, 9 এবং 7 পাউণ্ড ভার একটি 27 ইঞ্চি বাহু-বিশিষ্ট বর্গাকৃতি অনুভূমিক পাতের চারি কোণ হইতে ঝুলান হইয়াছে। কোথায় একটি বল প্রয়োগ করিলে কৌণিক বিন্দুতে প্রযুক্ত বলগুলিকে সাম্যাবস্থায় রাখা যাইবে, ইহা দুই সন্নিহিত বাহুর চারিদিকে ভ্রামক লইয়া নির্ণয় কর।

28. সমবেধ এবং ঘনাঙ্কবিশিষ্ট L-আকৃতি একটি পাতের উল্লম্ব বাহুর বাহিরের উচ্চতা এবং প্রস্থ 10 ইঞ্চি এবং 1 ইঞ্চি, অনুভূমিক বাহুর বাহিরের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ 6 ইঞ্চি এবং 2 ইঞ্চি। ইহার ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

(F)

29. একটি ভারী দণ্ড একটি অর্ধগোলাকৃতি বাটির ভিতর রহিয়াছে, দণ্ডের দৈর্ঘ্য বাটির ব্যাসার্ধের সমান এবং ইহার ভারকেন্দ্র দণ্ডের একপ্রান্ত হইতে এক-তৃতীয়াংশ দূরে। যদি দণ্ড উল্লম্বের সঙ্গে θ কোণ করে, দেখাও যে

$$\tan \theta = 3\sqrt{3}.$$

30 একটি দণ্ড তাহার একপ্রান্তে একটি কব্জার চারিদিকে উল্লম্ব সমতলে ঘুরিতে পারে, অপর প্রান্তে দণ্ডের অর্ধেক ভারবিশিষ্ট একটি ভার বাঁধা হইয়াছে; এই প্রান্ত l দৈর্ঘ্যের দড়ি দিয়া কব্জা হইতে উল্লম্ব c উঁচুতে একটি বিন্দুতে বাঁধা হইয়াছে। দণ্ডের ভার W হইলে দেখাও যে দড়ির টান $\frac{lW}{c}$।]

———

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1 [সূচনা—9 পৃষ্ঠা]

1. 30·48 সে. মি.। 2. 1·094 গজ (আসন্নমান)।
3. 28·35 গ্রাম।

পরীক্ষা পত্র

1. § 1-2 দেখ। 2. § 1-3 দেখ। 3. § 1-8 দেখ।
4. (i) ·7532 মি. (ii) 789·27 মি. (iii) ·08072 মি.
(iv) 32000 মি. (v) 57·2 মি.।
5. (i) 1·23 সে. মি. (ii) 457·6 সে. মি., (iii) 7500 সে.মি.
(iv) 7000 সে. মি.
6. (i) 7 কি. মি. (ii) ·25 কি. মি. (iii) ·070032 কি.মি.।
7. (i) 100 মি. মি. (ii) 779 মি. মি. (iii) 2000 মি. মি.।
8. (i) 99820 গ্রাম ; (ii) 38 গ্রাম।
9. (i) ·07035 কি. গ্রাম ; (ii) 98·405 কি. গ্রাম।

● গতিবিদ্যা ●

প্রশ্নমালা 2 [8 পৃষ্ঠা]

1. (i) 110 (ii) 1·5 2. (i) 1320 (ii) 600
3. (i) $7\frac{1}{3}$ (ii) 3 4. 440 ফুট
5. 16 সেকেণ্ডে 6. ঘণ্টায় 15 মাইল
7. (a) (i) 0·36 (ii) 6 (b) 1·67
8. (i) 38,400 (ii) $78.545\frac{5}{11}$
9. (i) 36 (ii) 129·6

প্রশ্নমালা 3 [21 পৃষ্ঠা]

1. (i) $w=10$; (ii) $v=7$; (iii) $w=7$;
(iv) $\alpha=60°$; (v) $u=3$; (vi) $v=16$.
2. সেকেণ্ডে 10 ফুট ; 3. সেকেণ্ডে 2 ফুট
4. সেকেণ্ডে 5 ফুট, পূর্বদিকের সঙ্গে উত্তরে $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ কোণ

5. বেগের মান সেকেণ্ডে 205 সে. মি.

6. উত্তর দিকে সেকেণ্ডে 10 ফুট 7. 150 গজ

8. সেকেণ্ডে 25 ফুট ; দিক্ লব্ধিবেগের সঙ্গে θ কোণ করিলে $\tan\theta = \frac{3}{4}$

9. (i) 10 ফু./সে. এবং 0 ; (ii) $2\sqrt{3}$ এবং 2 মাইল/ঘ.
(iii) $25\sqrt{2}$ এবং $25\sqrt{2}$ সে. মি./সে.
(iv) 12 এবং $12\sqrt{3}$ গজ/মি. (v) 0 এবং 10 কিলো মি./ঘ.
(vi) -22 এবং $22\sqrt{3}$ ফু./সে. (vii) -10 এবং 10 মাইল/ঘ.
(viii) $-11\sqrt{3}$ এবং 11 ফু./সে. (ix) -64 এবং 0 সে. মি./সে.

10. স্রোতের দিকের সঙ্গে α-কোণ করিয়া যেন $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$ হয় ;
20 $\sqrt{5}$ সেকেণ্ড 11. মিনিটে 30 মিটার

12. 387·2 ফুট, লক্ষ্যের দিকের সঙ্গে এমন কোণ α করিয়া যেন $\cos\alpha = -\frac{11}{60}$ হয়।

13. না ; 10 এবং 8-এর বৃহত্তম লব্ধি তৃতীয় বেগ 20-র সমান ও বিপরীতমুখী হওয়া সম্ভব নয়।

14. 120°

প্রশ্নমালা 4* [30 পৃষ্ঠা]

1. (i) 16 ফু./সে. (ii) 104 ফু./সে.

2. (i) 3 ঘণ্টা ; (ii) $7\frac{1}{2}$ ঘণ্টা 3. 1 মিনিট ; 12 সেকেণ্ড

5. সেকেণ্ডে 13 ফুট ; প্রথমের আপেক্ষিক বেগের দিক্ উত্তর দিকের সহিত $\theta°$ পশ্চিমে এবং $\tan\theta = \frac{12}{5}$; 780 ফুট।

6. ঘণ্টায় 20 মাইল উত্তরের সঙ্গে $\theta°$ পশ্চিমে $\tan\theta° = \frac{3}{4}$।

7. উত্তর-পূর্বদিকে ঘণ্টায় 12 মাইল। 8. ঘণ্টায় 45 মাইল।

9. ঘণ্টায় $2\sqrt{2}$ মাইল বেগে উত্তর-পশ্চিম দিক্ হইতে বহিতেছে।

10. ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে দক্ষিণ-পূর্ব দিকে। 11. উল্লম্বের সঙ্গে 30°

13. $\frac{160}{257}$ ঘণ্টা ; $\frac{10}{\sqrt{275}}$ মাইল 14. উভয়ের বেগ সমান।

15. উভয়ে যখন এক বিন্দুতে আসে তখন বেগ সর্বাধিক $3v$ এবং যখন বিপরীত অবস্থানে তখন বেগ সর্বাপেক্ষা কম v,

16. উত্তরের সঙ্গে $\theta°$ পূর্বদিকে যেন $\sin\theta = \frac{2}{3}$ ($\theta = 41°48'$ E of N) ; 0·447 ঘণ্টা পরে।

(*30 পৃষ্ঠার প্রশ্নমালার 6-এর স্থলে 4 হইবে)।

প্রশ্নমালা 5* [40 পৃষ্ঠা]

1. (i) 6 ফু./সে. ; 16 ফুট (ii) 0 ; 95 ফুট
(iii) -2 ফু./সে^{2}. ; 2 সেকেণ্ড। 2. 15 সেকেণ্ড ; 450 সে. মি.
3. 5 ফু./সে^{2}. 4. 80 সে. মি./সে. 5. 32 ফু./সে^{2}.
6. 64 ফু./সে. ; 36 ফুট ও 256 ফুট
7. ঘণ্টায় 40 মাইল ; $2346\frac{2}{3}$ ফুট 8. 50 ফু./সে. ; 3 ফু./সে^{2}.
9. আর 1 ইঞ্চি 10. 30 ফু./সে. ; -2 ফু./সে^{2}.
11. 41 ফুট ; 30 সেকেণ্ড ; 900 ফুট 12. 7 ফু/সে , 4 ফু./সে^{2}.
13. 8 সেকেণ্ড 14. $\frac{1}{3}$ ইঞ্চি 15. 13800 ফুট
16. 43 ফুট 17. 20 গজ
18. $\frac{69}{125}$ ফু./সে ^{2} ; 27 মাইল/ঘণ্টা ; 63 মাইল/ঘণ্টা।
21. 320 ফুট ; 22. 5 সেকেণ্ড ; $12\frac{1}{2}$ ফুট।

প্রশ্নমালা 6§ [51 পৃষ্ঠা]

1. (a) (i) 160 ফু./সে. (ii) 400 ফুট ; (iii) 2 সেকেণ্ড ;
(iv) 98 সে. মি./সে. (v) 1960 সে. মি. (vi) 10 সেকেণ্ড
(vii) 96 ফু./সে. ; (viii) 3 সেকেণ্ড ; (ix) 700 সে. মি./সে.
(x) $\frac{5}{7}$ সেকেণ্ড ; (xi) 144 ফুট (xii) 73·5 মিটার।
2 900 ফুট ; 3. 100 ফুট
4. (a) (i) 100 ফুট ; (ii) $2\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড ;
(iii) উঠিবার সময় 2 সেকেণ্ড পরে, নামিবার সময় 3 সেকেণ্ড পরে,
(iv) 5 সেকেণ্ড ; (v) 16 ফুট/সে. উপর দিকে ;
(vi) 16ফু./সে নীচের দিকে।
4. (b) 625 ফুট ; $12\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড।
5. 144 ফুট ; নীচের দিকে সেকেণ্ড 32 ফুট ; 128 ফুট।
6. (a) 8 ফু./সে. ; আর $3\frac{1}{3}$ সেকেণ্ড পরে।
6. (b) 1 সেকেণ্ড ; (5 সেকেণ্ড পরে নিম্ন দিকে পড়িবার সময় আবার এই উচ্চতায়)। 7. $7\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড
8. $1\frac{7}{8}$ সেকেণ্ড 9. $6\frac{1}{4}$ সেকেণ্ড ; 8·8 সেকেণ্ড। 10. 72 ফু./সে.
11. 80 ফু./সে. 12. 144 ফুট ; 16 ফুট 13. 48 ফু./সে.
14. দ্বিতীয়টি ছুঁড়িবার $1\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড পরে ; 48 ফুট উচ্চতায়

(*40 পৃষ্ঠার প্রশ্নমালা 3-এর স্থলে 5 হইবে)।
(§51 পৃষ্ঠার প্রশ্নমালা 4-এর স্থলে 6 হইবে)।

15. $29\frac{1}{3}$ ফু./সে. 16. 400 ফুট

17. 1296 ফুট ; 1280 ফুট। 18. 256 ফুট ; 128 ফু./সে.

19. $\frac{1}{4}$ সেকেণ্ড। 20. 57·6 ফু./সে. ; 230·4 ফুট।

21. 49 মিটার। 22. 4 সেকেণ্ড।

23. প্রদত্ত বিন্দু হইতে 176 ফুট উপরে ; প্রদত্ত বিন্দু হইতে 304 ফুট নীচে।

প্রশ্নমালা 7 (A) [68 পৃষ্ঠা]

1. (i) 1 ফুট ; 2 ফু./সে. (ii) 10 ফুট ; 20 ফু./সে.
(iii) 2·4 ফুট ; 4·8 ফু./সে.

2. (i) 144 ফুট ; 72 ফু./সে. (ii) এবং (iii) 15·36 ফুট ; 76·8 ফু./সে.

3. 32 ফু./সে. ; 32 ফুট 4. $1\frac{1}{4}$ সে. ; 32 ফু./সে. 5. 40 ফুট

6. 50 ফুট 7. 20 ফুট ; $1\frac{1}{4}$ সেকেণ্ড

8. 32 ফু./সে., $1\frac{9}{16}$ সেকেণ্ড ; 1 সেকেণ্ড

9. 32, 96, 160 ফুট ; 3 সেকেণ্ড 10. 30°

11. 45° 12. 30°

প্রশ্নমালা 7(B) : প্রাস [69 পৃষ্ঠা]

1. 500 ফু./সে. 2. 81 ফুট ; $4\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড ; 432 ফুট।

2. 128 ফুট ; 162 ফুট ; 200 ফুট। 4. 100 ফুট।

5. (i) 75 ফুট ; (ii) $100\sqrt{3}$ ফুট ; $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ সেকেণ্ড (iii) 48 ফু./সে.

6. 576 ফুট ; 320 ফু./সে. 7. 80 ফু./সে. 8. $1 : \sqrt{3}$.

9. 45° ; 80 ফু./সে. 10. 65·4 মিটার/সেকেণ্ড। 11. 400 ফুট

12. 1250 ফুট 13. 100 ফু./সে. 14. $440\sqrt{5}$ ফুট।

15. $60\sqrt{3}$ ফুট 16. $256\sqrt{2}$ ফু./সে. ; 45°

17. $40\sqrt{2}$ ফু./সে.

প্রশ্নমালা 8 [90 পৃষ্ঠা]

1. (i) 8 এফ্. পি. এস্. একক ; (ii) 107520 এফ্. পি. এস্. একক ;
(iii) 98100 সি. জি. এস্. একক ; (iv) 400 এফ্. পি. এস্. একক
(v) $20\sqrt{3}$ এফ্. পি. এস্. একক ; (vi) 2·3 (প্রায়) সি. জি. এস্. একক

2. 600 এফ্. পি. এস্. একক ; 3. 8960 এফ্. পি. এস্. একক ;

4. 240 : 7 5. 56 : 375

6. (i) 5 ফু/সে.^{2} (ii) 16 ফু./সে^{2} 7. 1125 ফুট

8. 160 পাউণ্ডাল, 5 পা. ভার। 9. 8 সেকেণ্ড

10. 985·6 পাউণ্ডাল

11. $242\frac{6}{9}$ সে মি /সে. ; $242\frac{2}{9}$ সে মি. ; $14533\frac{1}{3}$ সে. মি ।

12. 440 ফুট ; $27\frac{1}{2}$ টন ভার 13. 242 টন ভার।

14 $10778\frac{1}{3}$ পাউণ্ড ভার। 15. 404 পা. ভার।

16. $1\frac{1}{14}$ ইঞ্চি। 17. 785 সে. মি /সে^{2}

18. 9 স্টোন ভার ; 15 স্টোন ভার ; চাপ উভয়ক্ষেত্রে 0

19. 82·5 সেকেণ্ড 20. 300 পাউণ্ডাল

21. 196 সে. মি /সে.^{2} ; $7\frac{1}{7}$ সেকেণ্ড

22. (i) $4\frac{1}{2}$ পা. ভার (ii) 52 পা. ভার। 23 $6\frac{1}{3}$ টন।

পরীক্ষা পত্র

1. § 8-4 দেখ। 2. § 8-4 এবং § 8-7 দেখ।

3. § 8-1 দেখ ; 1600 এফ্. পি. এস্. একক।

4. § 8-11 দেখ। 5. § 8-11 দেখ ; § 8-10 দেখ।

6. § 8-12 দেখ। 7. § 8-15 দেখ।

8. 28·4 টন ভার (প্রায়)। 9. $\frac{xg}{2m}t^2$.

10. 3200 একক।

প্রশ্নমালা 9 [98 পৃষ্ঠা]

1. 2 ফু./সে. 2. 60 সে. মি/সে. 3. 10 ফু./সে ; 1 ফুট

4. $159468\frac{3}{4}$ পাউণ্ডাল। 5. 6·8 ফুট (প্রায়)

6. 250000 পাউণ্ড ভার। 7. 5 ফু./সে.

8. 20 সে. মি./সে. 9. 8 ফু /সে. 10. 4 টন।

11. 6 ফু./সে. ; 3·6 ফু./সে. 12. 2 : 1

প্রশ্নমালা 10 [115 পৃষ্ঠা]

1. (i) 1200 ফুট পাউণ্ডাল ; (ii) 5 ফুট-পাউণ্ড ; (iii) 25000 আর্গ ; (iv) 16 সে. মি. গ্রাম। 2. 9600 ফুট-পাউণ্ডাল ; 3. 200,000 আর্গ।

4. 152 ফুট-পাউণ্ড। 5. (i) 4096, (ii) 1024, (iii) 0 একক।

6. $16\sqrt{7}$ ফু/সে. 7. 90,000 ফুট-পাউণ্ডাল ; 30,000 পাউণ্ডাল। 8. 21 : 16. 10. $14\frac{2}{5}$. 11. 10584 পাউণ্ডাল। 12. 316800 ফুট-পাউণ্ড। 13. 5 ফুট-পাউণ্ড। 14. $\frac{4}{25}$ অশ্বশক্তি। 15. $6\frac{7}{8}$ টন। 16. $806\frac{2}{5}$. 17. 8 অশ্বশক্তি। 18. $776\frac{8}{15}$. 19. 55 ফু./সে. 21. 25 ফুট-পাউণ্ড। 22. $124\frac{1}{125}$. 23. $80\frac{5}{11}$. 24. $214\frac{2}{7}$. 25. $142\frac{1}{22}$. 26. $16\frac{1}{8}$ পাউণ্ড-ভার। 27. 896 28. $1\frac{41}{54}$ ফুট। 29. $5555\frac{5}{9}$ ফু.-পা. 30. 672 অশ্বশক্তি। 31. (i) ভরবেগ সমান (ii) গতীয় শক্তির অনুপাত $m : M$।

বিবিধ প্রশ্ন [119 পৃষ্ঠা]

1. মিনিটে 15 গজ 2. $\frac{b}{tt'}\sqrt{t'^2-t^2}$ 3. 8 মাইল।

4. স্রোতের লম্ব দিকে ; 2 মিনিট ; 880 ফুট। 5. $\sqrt{v^2-n^2}$

9. গন্তব্য দিকের সঙ্গে $\sin^{-1}\left(\frac{V}{v}\sin\theta\right)$ কোণে

11. $15\sqrt{5}$ মাইল/ঘণ্টা ; দক্ষিণের সঙ্গে θ কোণ পূর্ব দিকে, যেন $\tan\theta=\frac{1}{2}$
12. 8 সেকেণ্ড। 13. 7 ফু./সে. ; 4 ফু./সে.^{2}
14. 16 ফু./সে.^{2} ; 30 ফু./সে. 15. $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ সেকেণ্ড।
16. 3 সেকেণ্ড, $5\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড। 17. যথাস্থানের 49 ফুট এবং 529 ফুট নীচে। 18. $68\frac{4}{23}$ ফু./সে. ; $306\frac{18}{23}$ ফুট। 19. 150 ফুট।
20. 340 ফু./সে., 1800 ফুট। 21. প্রথম ঢিল ছুড়িবার 3 সেকেণ্ড পরে, শীর্ষ হইতে 64 ফুট নীচে। 22. 112 ফুট। 27. 2·4 গ্রাম।
28. 110 ফুট 29. 680 পা. ভার 30. 62500 আর্গ, 63·77 সেমি.গ্রাম।
31. 20 অশ্বশক্তি 32. $149\frac{1}{3}$ পা. প্রতি টনে ; 25·6 অশ্বশক্তি
33. (1) 10 টন ভার (2) $13\frac{1}{3}$ টন ভার 34. 41·6 পাউণ্ডাল
35. 0·004 সেকেণ্ড ; গড় বল=15,625 পাউণ্ডাল বা 488·3 পা. ভার ; 244,150 ফুট পা. প্রতি সেকেণ্ডে।
36. −30 ফু./সে ; 75600 ফুট পাউণ্ডাল এবং 103950 ফুট পাউণ্ডাল
37. $\sqrt{5}$ সেকেণ্ড ; 20 ফুট। 38. $\tan^{-1}\frac{4}{3}$; 200 ফু./সে., 10 সেকেণ্ড।

● স্থিতিবিদ্যা ●

প্রশ্নমালা 10 [পৃষ্ঠা 15]

1. (i) 13 (ii) 63 (iii) 13 (iv) $60°$ (v) 8
2. (i) 24 (ii) 6 3. 25 4. 25 5. প্রথম বলের সহিত $90°$ কোণে 10 পা. 6. 5 পা. 7. 8, 6 8. 12, 5 পা.
9. 25 গ্রাম 10. $120°$ 11. $90°$ 13. D বিন্দু BC বাহুর মধ্যবিন্দু হইলে লব্ধির মান ও দিক DA দ্বারা প্রদর্শিত হয়। 14. $\frac{3}{2}$BC
15. 3AD, AD রেখার দিকে। 17. কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর যোজক সরল রেখার মধ্যবিন্দুতে। 23. $60°$ 24. $120°$ 28. $90°$
32. 4 পা. ভার।

প্রশ্নমালা 11 [29 পৃষ্ঠা]

1. (i) 10 পা., 0 (ii) $6\sqrt{3}$ পা., 6 পা. (iii) 10 গ্রাম, 10 গ্রাম (iv) 7, $7\sqrt{3}$ আউন্স, (v) 0, 16 হন্দর (iv) -10 কিলোগ্রাম, $10\sqrt{3}$ কিলোগ্রাম (vii) $-4\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ টন (viii) $-25\sqrt{3}$, 25 গ্রাম। (ix) -9, 0 মিলিগ্রাম
2. $10\sqrt{3}$, 10 পা. 3. 10 টন ভার 4. $10\sqrt{10}$ পা. উল্লম্বের সঙ্গে $\tan^{-1}\frac{1}{3}$ কোণে। 5. $50\sqrt{3}$ পা. 6. (i) 10 গ্রাম (ii) 5 গ্রাম, 5 গ্রাম 7. 13 পা. 8. $\sqrt{3}$ পা, ; প্রথমের সঙ্গে $210°$ কোণে (দ্বিতীয় বলের লম্বাভিমুখে) 9. 15 গ্রাম, $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ পূর্বদিকের সঙ্গে উত্তরে। 10. $2\sqrt{2}$ গ্রাম O হইতে CD-র লম্বাভিমুখে।
11. দ্বিতীয় বলের সঙ্গে $90°$ কোণে $\sqrt{3}$ পা. 12. মধ্যবর্তী বলের দিকে 2P.
13. 2P, OA রেখার সহিত $60°$ কোণে অর্থাৎ 3P বলের দিকে।
14. 3 এবং 13 পাউণ্ডভার। 15. $\sqrt{200+128\sqrt{2}}$ পা. ভার।
16. (i) $\frac{200\sqrt{3}}{3}$ গ্রাম ভার (ii) 200 গ্রাম ভার
17. $100(\sqrt{3}-1)$ পা. ভার এবং $50\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ পা. ভার।

পরীক্ষা পত্র

1. $120°$ 2. 3 পা. এবং 1 পা. ভার 4. $Q\sqrt{3}$, ইহা P-এর লম্বাভিমুখী দিকে।

প্রশ্নমালা 11 (B) [40 পৃষ্ঠা]

2. প্রথম দড়িতে $28\frac{4}{5}$ পা. ভার ; দ্বিতীয় দড়িতে $21\frac{3}{5}$ পা. ভার
3. 15 এবং 8 কি. গ্রাম ভার। 4. 96 এবং 28 পা. ভার
6. 48 এবং 64 পা. ভার।
7. $50(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; $100(\sqrt{3}-1)$ কি. গ্রা.।
9. $10\sqrt{3}$ এবং 20 পা. ভার। 15. 4FO (O বৃত্তের কেন্দ্র)।
16. $2\sqrt{7}$ 17. 10 পা. ভার বিপরীত কৌণিক বিন্দুর দিকে।

প্রশ্নমালা 12 [48 পৃষ্ঠা]

1. (i) R=10, AC=2 ফুট ; (ii) R=50, AC=16 সে. মি.
2. (i) 20, AC=−7 ফুট ; (ii) R=20, AC=−6 সে. মি. ; (iii) 8, AC=15 সে. মি.।
3. (i) Q=6, AB=8 ফুট ; (ii) P=10, R=30 (iii) Q=18, R=30
4. (*a*) (i) Q=3, AB=12 ইঞ্চি (ii) P=12, R=7 (iii) Q=3, R=3
(*b*) 30 পা. ভার, ক্রিয়া রেখা প্রথম বল হইতে $5\frac{1}{3}$ ইঞ্চি দূরে।
(*c*) 10 পা. ভার ক্রিয়া রেখা প্রথম বল হইতে −15 ইঞ্চি দূরে।
5. $12\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$ পা. 6. 120, 30 গ্রাম 7. $72\frac{8}{11}$, $87\frac{3}{11}$ পা.
8. 20, 30 কিলোগ্রাম। 9. 650 পা. 10. 60 পা.
11. চাপ, হাত ও কাঁধের মধ্যে দূরত্বের ব্যস্ত অনুপাতে পরিবর্তিত হয়।
12. $102\frac{2}{3}$, $51\frac{1}{3}$ পা. 13. 2·6 ফুট দূরে। 14. 40 এবং 35 পা.
15. 26·25 কিলোগ্রাম এবং 23·75 কে. জি.

প্রশ্নমালা 13 [63 পৃষ্ঠা]

1. (i) 16, (ii) $16\sqrt{3}$, (iii) 32 (iv) $16\sqrt{2}$, (v) 16 ফুট-পাউণ্ড একক। 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3}$ এবং $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ফুট-পাউণ্ড একক। 3. $6\frac{4}{5}$ ইঞ্চি
4. 2 ফুট। 5. মধ্যবিন্দু হইতে $8\frac{8}{17}$ ইঞ্চি দূরে (16 পা. ভারের দিকে)
6. মধ্যবিন্দু হইতে (30 পা. ভারের দিকে) $\frac{5}{11}$ ফুট দূরে।
7. প্রথম বল হইতে $12\frac{1}{2}$ ইঞ্চি দূরে। 8. $21\frac{1}{3}$ সে. মি. দূরে।
9. উক্ত প্রান্ত হইতে $5\frac{4}{5}$ ফুট দূরে। 10. 1 পা. ভার। 11. 5 পা. ভার
12. 12 পা. ভার কীলক হইতে 3 ইঞ্চি দূরে। 13. দণ্ডের দৈর্ঘ্যের $\frac{1}{4}$ দূরে।

14. 52 পা. বল। 15. ভার 3 পা., ইহা 4 পা. ভার হইতে 7 ইঞ্চি দূরে।
16. $3\frac{1}{3}$ ফুট 160 পা, 0। 17. 90 পা. ভার। 18. 12 ফুট।
19. অপর কীলক হইতে $3\frac{3}{8}$ ফুট দূরে। 20. 75 পা., 35 পা.
21. 2 আউন্স। 22. $2\sqrt{2}P$, CA রেখার সমান্তরাল এবং A বিন্দু হইতে $-\frac{5}{2}a$ দূরে (a বাহুর দৈর্ঘ্য)। 23. $-2a$ দূরে। 24. 150 গ্রাম ভার ; 30 সে. মি.। 25. $75\sqrt{3}$ পা. ভার। 26. $\frac{PR}{PQ}=\frac{M}{M-N}$.

প্রশ্নমালা 14 [75 পৃষ্ঠা]

1. 10 ফুট-পাউণ্ড। 2. AD বাহু বরাবর ক্রিয়া করিলে।
3. $5a$ (a প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য)। 4. (a) $20\sqrt{3}$ ফুট-পাউণ্ড।
4. (b) 30 পা. ভার, AC$=\frac{16}{3}$ ইঞ্চি। 4. (c) 10 পা. ভার, AC$=-16$ ইঞ্চি।
5. 10 পাউণ্ড ভারের বল, প্রদত্ত 10 পা.-এর সমান্তরাল এবং 1·2 ফুট দূরে।
6. B-এর দিকে C হইতে দণ্ডের অর্ধেক দৈর্ঘ্য দূরে ; প্রদত্ত 8 পা. ভার বলের সমান ও বিপরীতমুখী বল। 7. $2a$ একক (a বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য)।

প্রশ্নমালা 15 [79 পৃষ্ঠা]

3. দণ্ড উল্লম্বের সঙ্গে θ কোণ করিলে $\sin\theta=\frac{24}{25}$; 20 পা., 15 পা.।
4. 30 পা. ভার। 5. $\frac{1}{3}W\sqrt{3}$ 6. 20 পা. ভার।
7. 12 পা.। 8. 225 এবং 135 পা. ভার। 9. $W\cot\alpha$, $W\operatorname{cosec}\alpha$

প্রশ্নমালা 16 [95 পৃষ্ঠা]

1. (i) মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু (ii) A বিন্দুতে অসদৃশ ; D বিন্দু BC বাহুর মধ্যবিন্দু হইলে বর্ধিত AD-তে E বিন্দু, যেন DE$=$AD.
3. AB এবং CD-র মধ্যবিন্দুর যোজক সরলরেখার উপর AB হইতে $\frac{3}{5}$AB দূরে। 4. $2\frac{1}{2}$ ফুট। 5. $1\frac{1}{3}$, 1, $\frac{4}{5}$ ইঞ্চি। 6. $\cos^{-1}\frac{7}{25}$.
7. AD হইতে 5 ইঞ্চি দূরে এবং AB হইতে $5\frac{10}{11}$ ইঞ্চি দূরে।
9. $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{3}$ 10. $\frac{W}{3}$
11. AD হইতে $\frac{7}{8}a$ এবং AB হইতে $\frac{4}{8}a$ দূরে (a বর্গক্ষেত্রের বাহু)।

12. ছেদার কেন্দ্র এবং পাতের কেন্দ্রের বর্ধিত রেখায় পাতের কেন্দ্র হইতে $\frac{r}{210}$ দূরে।

13. পাতের কেন্দ্র ও ছেদার কেন্দ্রের যোজক সরল রেখার উপর, পাতের কেন্দ্র হইতে $\frac{3}{8}$ সে. মি. দূরে।

14. বৃত্তের কেন্দ্র হইতে 16 ইঞ্চি দূরে। 15. ষড়ভুজের কেন্দ্র O হইতে OC বরাবর $\frac{1}{5}$OC দূরে। 16. AB এবং AB-র লম্বরেখাকে অক্ষ লইয়া $\bar{x}=\frac{11}{28}a$, $\bar{y}=\frac{3\sqrt{3}}{7}a$. 17. COD ত্রিভুজের মধ্যমার উপর O হইতে $\frac{1}{9}a$ দূরে (a বর্গক্ষেত্রের বাহু) 22. 5·6 সে. মি.।

প্রশ্নমালা 17 (ক) [110 পৃষ্ঠা]

1. 7 ফুট এবং 3 ফুট ; 2. 10 কি. গ্রা. 3. কম ভার হইতে $8\frac{1}{3}$ ফুট দূরে ; 4. 10 পা. এবং 30 পা. ভার ; 5. 22 এবং 6 ইঞ্চি ; 6. 14 পা. ; 1 ফুট। 7. 8 পা.। 8. 1320 পা. ; 1440 পা.। 10. 24 পা. ভার।

প্রশ্নমালা 17 (খ) [114 পৃষ্ঠা]

1. 15 পা. 2. 20 পা. 3. 2 গ্রাম 4. 8·484 পা.।
5. প্রতি পাউণ্ড টা. 2·75 7. 8 : 7
8. 2 : 3 ; 6 পা. ভার।

প্রশ্নমালা 17 (গ) [118 পৃষ্ঠা]

1. 35 ইঞ্চি। 2. 5, 13, 29, 61 ইঞ্চি দূরে।
3. 18 এবং 8 পা. 4. 25 ইঞ্চি দূরে। 6. 18 ইঞ্চি।

প্রশ্নমালা 17 (ঘ) [128 পৃষ্ঠা]

1. (i) 160 কি. গ্রাম, (ii) $6\frac{1}{4}$ পা. ভার, (iii) 3.
2. (i) 5 পা. ভার, (ii) 9 কি. গ্রা., (iii) 2 কি. গ্রা.
3. (i) 15 পা. ভার, (ii) 2 কি. গ্রা. (iii) 4.
4. (i) 41 পা. ভার, (ii) 10 পা. ভার, (iii) 1 কি. গ্রা.
5. 16. 6. 38 পা. ভার। 7. 7.
8. 136 পা. ভার। 9. 375 পা. ভার। 10. 70 পা. ভার।

12 18 পা. ভার। 13. প্রান্ত হইতে 4·4 সে. মি. দূরে।

14. প্রান্ত হইতে 2 সে. মি. দূরে। 15. 7 ; 14 পা. ভার

16. 112 পা. ভার। 17. 10 পা. ভার। 18. 7

19. 84 পা. ভার ; 728 পা. ভার।

প্রশ্নমালা 17 (ঙ) [134 পৃষ্ঠা]

1. (i) 12 পা. (ii) 18 পা. (iii) 26 কি. গ্রাম।

2. (i) 192 ফুট-পাউণ্ড ; (ii) 576 ফুট-পাউণ্ড ; (iii) 3184 কিলোগ্রাম-মিটার। 3. (i) 50 পা. (ii) 28 পা. (iii) 400 গ্রাম ভার।

4. (i) 3250 ফু. পা. (ii) 700 ফু. পা. (iii) 20,000 সেন্টিমিটার-গ্রাম।

5. 30 পা. ভার ; 50 পা. ভার। 6. 30°. 8. $\sqrt{3} : 1$.

10. $60\sqrt{3}$ পা. ভার ; 1800 ফু.-পা.।

বিবিধ প্রশ্ন [135 পৃষ্ঠা]

(A)

2. প্রত্যেক বল P হইলে লব্ধি 2P. 6. 0 8. DC বরাবর 2P

9. $2\sqrt{2}$-এর অনুপাতে 10. 2AC, AC বরাবর।

11. লব্ধির মান 1 এবং ইহা AC র দিকে

(B)

13. সদৃশ সমান্তরাল বল হইলে দূরত্ব $33\frac{1}{3}$ ফুট, অসদৃশ সমান্তরাল হইলে দূরত্ব $6\frac{2}{3}$ ফুট।

(C)

16. বয়স্ক লোক হইতে $1\frac{1}{2}$ ফুট দূরে। 17. 5 ফুট।

(D)

20. $10\sqrt{2}$ এবং 10 পা. ভার। 21. $20\sqrt{3}$ পা. ভার ; 40 পা. ভার।

24. $\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$ পা. ভার।

(E)

25. ভূমির উপর অঙ্কিত মধ্যমাতে ভূমি হইতে 1 ফুট দূরে ; ঐ মধ্যমাতে শীর্ষ হইতে 2/3 ফুট দূরে।   26. $1\frac{3}{8}$ ফুট।

27. প্রথম কৌণিক বিন্দুগামী বাহু দুইটি হইতে 16 এবং 15 ইঞ্চি দূরে।

28. বাহিরের উল্লম্ব এবং অনুভূমিক বাহুদ্বয় হইতে যথাক্রমে 2 এবং 3 ইঞ্চি দূরে।

মাধ্যমিক পরীক্ষা, ১৯৮২

MECHANICS

১। (ক) কণার বেগ ও ত্বরণ—এই দুইটি শব্দের সংজ্ঞা লিখ।

(খ) 980 সে.মি./সেকেণ্ড^2 = x কি. মি/ঘণ্টা^{2} হইলে x-এর মান কত ?

(গ) একটি কণা সরলরেখা PQ বরাবর চলিতেছে এবং t সেকেণ্ড পরে P হইতে উহার দূরত্ব x সে. মি। t-এর সকল মানের ক্ষেত্রেই যদি x এবং t-এর সম্বন্ধ $x = 0·25\ t + 0·375\ t^2$ হয়, তবে চতুর্থ সেকেণ্ড সময়কালের মধ্যে বস্তুটির গড় বেগ বাহির কর।

(ঘ) বলের "ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত প্রতিপাদ্য"টি বিবৃত কর। প্রদত্ত কোন দিকে একটি বলের বিশ্লেষিত অংশ বলিতে কি বুঝ ?

$40\sqrt{3}$ একক একটি বলকে পরস্পর 60° কোণে ক্রিয়মান দুইটি সমান বলে বিশ্লেষিত কর।

(ঙ) নিউটনের তিনটি গতিসূত্র বিবৃত কর।

এক কিলোগ্রাম ভরের উপর পাঁচ মিনিট যাবৎ ক্রিয়া করিয়া যে বল উহাতে এক মিটার/সেকেণ্ড বেগ উৎপন্ন করে তাহার মান ডাইনে (dynes-এ) প্রকাশ কর।

২। (ক) ভূমি হইতে 490 মিটার উচ্চতা হইতে একখণ্ড পাথরকে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। ঐ একই মুহূর্তে 70 মি/ সেকেণ্ড বেগে ভূমি হইতে অপর একটি পাথর খণ্ড একই উল্লম্ব রেখা বরাবর উপর দিকে উৎক্ষিপ্ত করা হইল। পাথর খণ্ড দুইটি কখন এবং কোথায় মিলিত হইবে ? (ধর $g = 980$ সেমি/সে^{2})

(খ) 10 গ্রাম ভরের একটি বস্তুর উপর 20 ডাইনের একটি ধ্রুবক বল ক্রিয়া করায় বস্তুটি 25 সে. মি. দূরত্ব অতিক্রম করিল। তারপর বল অপসৃত করা হইল। যে ধ্রুবক বল এখন বস্তুটিকে 50 সে. মি. দূরত্বে থামাইবে তাহার মান কত তাহা নির্ণয় কর।

৩। (ক) একটি ট্রেন এক ঘণ্টায় A স্টেশনে হইতে B স্টেশনে যায়। A এবং B-এর মধ্যবর্তী কোন বিন্দু C-তে উহা সর্বোচ্চ বেগ 50 কি. মি/ঘণ্টা লাভ করে। যদি ট্রেনটি A-তে স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা করিয়া সমত্বরণ f লইয়া C পর্যন্ত চলে এবং C হইতে B পর্যন্ত সমমন্দন f' লইয়া B-তে আসিয়া থামিয়া যায়, তবে প্রমাণ কর যে A হইতে B-এর দূরত্ব 25 কি. মি.।

(খ) একটি মসৃণ নততলের (smooth inclined plane-এর) শীর্ষে স্থিতাবস্থায় স্থিত কোন একটি কণাকে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। কণাটি যাত্রা করার পর পঞ্চম (fifth) সেকেণ্ডে 22·05 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করিল। প্রমাণ কর যে নততলটি অনুভূমিক তলের সহিত 30° কোণে নত। ($g = 9·80$ মি/সে^{2})

৪। (ক) একটি সম-বলের অধীন কোন একটি কণা সরলরেখা বরাবর চলিতে শুরু করিল। প্রমাণ কর যে উহার গতীয় শক্তির বৃদ্ধি, প্রযুক্ত বলের দ্বারা কৃতকার্যের পরিমাণের সমান।

(খ) শক্তির নিত্যতা তত্ত্বটি বিবৃত কর এবং অভিকর্ষ অধীন একটি পতনশীল কণার (যাহা স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা শুরু করে) ক্ষেত্রে এই তত্ত্বটির সত্যতা যাচাই করিয়া দেখ।

(গ) 200 টন ওজনবিশিষ্ট একটি রেল-ট্রেনকে একটি ইঞ্জিন সমতলে অবস্থিত রেলপথ বরাবর 40 মাইল/ঘণ্টা সমবেগে টানিতে শুরু করিল। ঘর্ষণ ইত্যাদির জন্য যে বাধা (resistance) অতিক্রম করিতে হয় তাহার পরিমাণ প্রতি টনে 10 পাউণ্ড-ভার। ইঞ্জিনটি কত অশ্ব-শক্তি (Horse-power বা H.P.) নিয়োগ করে?

৫। (ক) কোন সুদৃঢ় বস্তুর দুইটি বিন্দু A ও B-তে দুইটি অসমান, অসদৃশ, সমান্তরাল বল P এবং Q ক্রিয়া করে ($P>Q$); উহাদের লব্ধি নির্ণয় কর। [একটি পরিচ্ছন্ন চিত্র অবশ্যই অংকন করিতে হইবে।]

(খ) কোন সুদৃঢ় বস্তুর A এবং B বিন্দুতে দুইটি অসদৃশ, সমান্তরাল বল যথাক্রমে P এবং Q ($P>Q$) ক্রিয়া করিতেছে। যদি P এবং Q প্রত্যেকটির x পরিমাণ বৃদ্ধি ঘটান হয়, তবে দেখাও যে লব্ধিটি d দূরত্বের মধ্য দিয়া স্থানান্তরিত হইবে, যেখানে

$$d=\frac{x.AB}{P-Q}.$$

৬। (ক) 'কোন বিন্দুর সাপেক্ষে একটি বলের ভ্রামক'-এর সংজ্ঞা লিখ। ABCD বর্গের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 2 সে. মি.। 1, 2, 3, 4 গ্রাম-ভারের বলসমূহ যথাক্রমে AB, CB, DC, DA বরাবর ক্রিয়া করিতেছে। নিম্নের বিন্দুগুলির সাপেক্ষে উহাদের ভ্রামকগুলির বীজগাণিতিক সমষ্টি নির্ণয় কর :—

(১) A ; (২) B ; (৩) বর্গটির কেন্দ্র।

(খ) বস্তুর ভার-কেন্দ্রের সংজ্ঞা লিখ।

যদি একই ভূমির উপর দুইটি ত্রিভুজ অবস্থিত থাকে, দেখাও যে ত্রিভুজদ্বয়ের ভারকেন্দ্রের সংযোজক রেখা উহাদের শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার সমান্তরাল।

৭। (ক) দ্বিতীয় প্রণালীর একটি কপিকলের (একটি মাত্র দড়িযুক্ত যে কপিকল) পরিচ্ছন্ন চিত্রসহ বর্ণনা কর। এক্ষণে ধর, এইরূপ একটি কপিকলের মোট কপির সংখ্যা 12 এবং মনে কর কপিসমূহের ভার অগ্রাহ্য করা চলে। এই কপিকলটিতে 5 কি. গ্রা. ভারের ওজন ব্যবহার করিয়া কত পরিমাণ ওজন তোলা যাইবে?

(খ) কোন একটি তুলার পাল্লা দুইটির (scale-pans) ওজন অসমান কিন্তু অন্য সকল বিষয়ে তুলাটির কোন দোষ-ত্রুটি নাই। কোন একটি বস্তুকে পরপর পাল্লা দুইটিতে বসাইয়া ওজন পাওয়া গেল W_1 এবং W_2 ; বস্তুটির প্রকৃত ওজন কত হইবে তাহা বাহির কর।

৮। (ক) তিনটি সমতলীয় বল একটি কণায় প্রযুক্ত হইয়া সাম্যাবস্থায় থাকিবার এক প্রস্থ শর্ত বিবৃত কর। সাম্যাবস্থায় থাকিবার জন্য এই শর্তগুলি কি যথেষ্ট?

(খ) প্রমাণ কর যে একটি ত্রিভুজাকার সম-পাতের ভারকেন্দ্র এবং উহার বাহুগুলির মধ্য-বিন্দুতে স্থাপিত তিনটি সমান ওজনের কণার ভারকেন্দ্র অভিন্ন।

৯। (ক) চিত্রসহ একটি সাধারণ তুলার (Common balance) বর্ণনা কর।

(খ) AB কোন একটি বৃত্তের ব্যাস এবং AC, AD A বিন্দুগামী পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত দুইটি জ্যা।

প্রমাণ কর যে B বিন্দুর সাপেক্ষে $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ দ্বারা নির্দেশিত বল দুইটির ভ্রামকদ্বয়ের মান সমান।

(গ) অভিকর্ষের ক্রিয়াধীন একটি বস্তুকে উল্লম্বভাবে উপরের দিকে নিক্ষেপ করিলে, দেখাও যে উঠিবার কাল=নামিবার কাল=উত্থিতিকালের অর্ধেক।

মাধ্যমিক পরীক্ষা—১৯৮৩

MECHANICS

১। (ক) উপযুক্ত উদাহরণ দ্বারা গতিশীল কোন কণার 'সমবেগ' ও 'সমদ্রুতি' এই দুইটি ধারণার পার্থক্য বুঝাইয়া দাও।

(খ) সমত্বরণসহ সরলরেখা বরাবর গতিশীল একটি বিন্দু যখন 15 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে তখন উহার বেগ 300 সে. মি./সেকেন্ড হইতে বৃদ্ধি পাইয়া 600 সে. মি./সেকেন্ড হয়। উহার ত্বরণের পরিমাণ বাহির কর।

(গ) বলের সামান্তরিক সূত্রটি বিবৃত কর।

O বিন্দুতে ক্রিয়মাণ দুইটি বল P এবং Q-এর লব্ধি, R, P-এর অভিমুখের সহিত সমকোণে অবস্থান করে। যদি P : Q=5 : 13 হয়, তাহা হইলে অনুপাত Q : R কত হইবে তাহা নির্ণয় কর। (একটি চিত্র এক্ষেত্রে অত্যাবশ্যক)।

(ঘ) নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রটি বিবৃত কর। এই সূত্রটি হইতে $P=mf$ সম্বন্ধটি প্রতিপাদন কর। নিউটনের মতের ভিত্তিতে কোন বস্তুর 'ওজন' ও 'ভরের' পার্থক্য ব্যাখ্যা কর।

(ঙ) উপযুক্ত চিত্র অঙ্কন করিয়া নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে ভারকেন্দ্রের অবস্থান স্পষ্টভাবে নির্দেশ করিয়া দাও :—

(১) একটি সম-দণ্ড; (২) ত্রিকোণ সমপাত; (৩) সামান্তরিক গঠন করিয়াছে এইরূপ একটি সমপাত; (৪) বৃত্তাকার সমপাত বা চাকতি।

২। (ক) একটি সরলরেখা বরাবর সমমন্দনসহ গতিশীল একটি কণা উহার গতির পঞ্চম সেকেন্ডে 2 মিটার 10 সে. মি. অতিক্রম করিল এবং অবশেষে কিছু সময় পরে উহা থামিল। যদি উহা গতির শেষ সেকেন্ডে সমগ্র দূরত্বের $\frac{1}{64}$ অংশ অতিক্রম করে, তবে উহা কতক্ষণ গতিশীল ছিল এবং যাত্রার সময় উহার বেগ কত ছিল তাহাও নির্ণয় কর।

(খ) কোন উল্লম্ব রেখার উপর A, B, C, D চারিটি বিন্দু। দেওয়া আছে যে AB, BC এবং CD দৈর্ঘ্যগুলি সমান। যদি কোন বস্তু সর্বোচ্চ বিন্দু A হইতে বাধাহীনভাবে পড়ে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে AB, BC এবং CD অতিক্রমণের সময়ের অনুপাত হইল $1 : \sqrt{2}-1 : \sqrt{3}-\sqrt{2}$।

৩। (ক) 30 গ্রাম ওজনের একটি বুলেট একটি স্থির কাষ্ঠখণ্ডের মধ্যে 294 মিটার/সেকেণ্ড বেগসহ নিক্ষিপ্ত হইল এবং উহা $\frac{1}{150}$ সেকেণ্ড অন্তে স্থির অবস্থায় আসিল। কাষ্ঠখণ্ডের বাধা যদি সম (uniform) ধরা যায় তাহা হইলে ঐ বাধার পরিমাণ ডাইনে এবং গ্রাম-ভরে নির্ণয় কর ($g=980$ সে. মি./সেকেণ্ড^2)।

(খ) কোন মসৃণ নততলের দৈর্ঘ্য 128 একক এবং উচ্চতা 64 একক। শীর্ষ-বিন্দু হইতে একটি কণা তলের উপর দিয়া গড়াইয়া পাদদেশে আসিতে কত সময় লাগিবে? উহার অর্ধ সময়ে কণাটির অবস্থানও নির্ণয় কর। ($g=32$ একক)।

৪। (ক) কোন বস্তুর "গতীয় শক্তি" এবং "স্থৈতিক শক্তি"র সংজ্ঞা লিখ।

ভূপৃষ্ঠ হইতে h উচ্চতায় অবস্থিত একটি m ভরবিশিষ্ট কণাকে ছাড়িয়া দেওয়া হইল। শীর্ষ হইতে x দূরত্ব নামিয়া আসার মুহূর্তে উহার গতীয় শক্তি ও স্থৈতিক শক্তি কত হইবে তাহা নির্ণয় কর।

(খ) 200 টন ওজনের একটি রেল-ট্রেনকে উহার ইঞ্জিন সমতল রেলপথে 40 মাইল/ঘণ্টা বেগে চালিত করে। ঘর্ষণ ইত্যাদির জন্য বাধার (resistance) পরিমাণ টন প্রতি 10 পাউণ্ড। ইঞ্জিনের অশ্ব-শক্তি (Horse-power) কত?

15 মাইল/ঘণ্টা=22 ফুট/সেকেণ্ড; $g=31$ ফুট/সেকেণ্ড^2; এক অশ্বশক্তি= 550 ফুট পাউণ্ড কাজ/সেকেণ্ড। এক টন=2240 পাউণ্ড।

৫। (ক) একটি পরিচ্ছন্ন চিত্র অংকন করিয়া প্রমাণ কর যে যদি অসমান দুইটি বল এক বিন্দুতে কাজ করে তাহা হইলে উহাদের লব্ধিটি বৃহত্তর বলটির নিকটবর্তী হইবে। (খ) এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের লব্ধির বৃহত্তম মান 17 একক এবং ক্ষুদ্রতম মান 7 একক; যখন বল দুইটি 60° কোণে ক্রিয়া করে তখন উহাদের লব্ধির মান কত তাহা নির্ণয় কর।

(গ) এক ব্যক্তি স্কন্ধের উপর অনুভূমিকভাবে রক্ষিত একটি লাঠির এক প্রান্ত হইতে ঝোলান একটি বোঝা বহন করিতেছেন; যদি তাঁহার স্কন্ধ ও হস্তের মধ্যবর্তী দূরত্বের পরিবর্তন করা হয় তবে তাঁহার স্কন্ধের উপর চাপের কিরূপ পরিবর্তন হইবে?

৬। (ক) কোন বিন্দুর সাপেক্ষে একটি বলের ভ্রামকের সংজ্ঞা লিখ। উহার প্রাকৃতিক তাৎপর্য (Physical significance) কি? যদি কোন বিন্দুর সাপেক্ষে $P(\neq 0)$ বলের ভ্রামক শূন্য হয়, তাহা হইলে তুমি কি সিদ্ধান্ত করিবে?

PQRS একটি বর্গ (যাহার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে. মি.) এবং 4, 3, 2 এবং 5 গ্রাম-ভার বলগুলি যথাক্রমে RQ, QP, SP, SQ বরাবর ক্রিয়া করে। R বিন্দু সাপেক্ষে বলগুলির ভ্রামকের বীজগাণিতিক সমষ্টি নির্ণয় কর।

(খ) একটি বস্তুর ভারকেন্দ্রের সংজ্ঞা লিখ। প্রমাণ কর যে কোন বস্তুর একাধিক ভারকেন্দ্র থাকিতে পারে না।

210 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার-সম চাক্‌তি হইতে 70 সে. মি. ব্যাসের এইরূপ একটি বৃত্ত ছিন্ন করা হইল, যাহা চাক্‌তিটির কেন্দ্রগামী। অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্র নির্ণয় কর।

৭। (ক) একটি পরিচ্ছন্ন চিত্রের সাহায্যে তিনটি সচল কপি আছে এমন একটি প্রথম শ্রেণীর কপিকলের (বিচ্ছিন্ন রজ্জু প্রণালীর) বর্ণনা কর। কপিগুলির ভার অগ্রাহ্য না করিয়া কপিকলটির যান্ত্রিক সুবিধা কত হইবে তাহা নির্ণয় কর।

(খ) তুলার বাহুদ্বয় সমান কিন্তু ভারকেন্দ্র আলম্ব হইতে তুলাদণ্ডের লম্ব রেখার উপর অবস্থিত নয় এমন একটি তুলা দিয়া কিভাবে একটি বস্তুর প্রকৃত ভার নির্ণয় করা যায় ?

৮। (ক) একটি বিন্দুতে ক্রিয়মাণ তিনটি বা ততোধিক সমতলীয় বলসমূহের সাম্যাবস্থায় থাকিবার এক সেট্ শর্ত বিবৃত কর। সাম্যাবস্থার জন্য এই শর্তগুলি কি প্রয়োজনীয় ? এই শর্তগুলি সাম্যাবস্থায় থাকার পক্ষে কি যথেষ্ট ?

(খ) AB একটি বৃত্তের ব্যাস। AC, AD পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত ঐ বৃত্তের দুইটি জ্যা। দেখাও যে B বিন্দুর সাপেক্ষে AC এবং AD দ্বারা নির্দেশিত বল দুইটির ভ্রামকদ্বয় সমান।

(গ) দুইটি অসদৃশ সমান্তরাল বল 20 গ্রাঃ এবং 8 গ্রাঃ কোন দৃঢ় বস্তুর A এবং B বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যদি AB=3 সে. মি. হয় তাহা হইলে লব্ধির মান এবং প্রয়োগ-বিন্দু নির্ণয় কর।

৯। (ক) কোন বুরুজ-শীর্ষ (top of a tower) হইতে একটি বস্তুকে উল্লম্ব-ভাবে 80 (eighty) ফুট/সেকেণ্ড বেগসহ উপরদিকে উৎক্ষিপ্ত করা হইল। দেখাও যে 6 সেকেণ্ড পরে ঐ বস্তুটি প্রক্ষিপ্ত বিন্দু হইতে, 96 ফুট নীচে থাকিবে। ($g=32$ ft/sec^2)

(খ) 'এক ডাইন' বলিতে ঠিক কি বুঝায় ? 'এক গ্রাম-ভারে'র সহিত উহার সম্পর্ক কি ?

কোন এক পদ্ধতি অনুসারে ভরের একক এক কিলোগ্রাম, দৈর্ঘ্যের একক 10 সে. মি. এবং সময়ের একক 100 সেকেণ্ড লওয়া হইল। প্রমাণ কর যে এই পদ্ধতিতেও বলের একক পুনরায় 'এক ডাইন'ই হইবে।

মাধ্যমিক পরীক্ষা, ১৯৮৪
MECHANICS

১। (ক) কোন গতিশীল কণার **ত্বরণ** এবং **মন্দন** বলিতে কি বুঝ ?
1 সে. মি./সেকেন্ড/সেকেন্ড $= x$ মি./মিনিট/মিনিট হইলে x-এর মান কত ?

(খ) 27 কি. মি./ঘণ্টা বেগে ধাবমান একটি ট্রেন ব্রেক কষিবার পর 15 মিটার যাইয়া থামে। উহার মন্দন কত তাহা নির্ণয় কর। উহা থামিতে কত সময় লাগে ? মন্দন মি./সেকেন্ড/সেকেন্ডে ও সময় সেকেন্ডে প্রকাশ করিতে হইবে।]

(গ) নিউটনের প্রথম গতি সূত্রটি বিবৃত কর।

(ঘ) সরলরেখা বরাবর গতিশীল একটি বস্তুর উপর 520 ডাইনের একটি সম-বলের 30 সেকেন্ড যাবৎ ক্রিয়ার ফলে বস্তুটির বেগ 290 সে. মি./ সেকেন্ড হইতে পরিবর্তিত হইয়া 3·5 মিটার/সেকেন্ড হইল। বস্তুটির ভর কত তাহা গ্রামে প্রকাশ কর।

(ঙ) বলের ত্রিভুজ সূত্রটি বিবৃত কর। একটি চিত্রের সাহায্যে এই সূত্রটির ব্যাখ্যা কর।

একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের পরিমাণ 6 এবং 8 একক। বল দুইটির ক্ষুদ্রতম এবং বৃহত্তম লব্ধি কত হইতে পারে ?

২। (ক) একটি কণা সমত্বরণসহ সরলরেখা অবলম্বন করিয়া চলিতেছে ; যাত্রার সময় হইতে একাদশ ও পঞ্চদশ সেকেন্ডে উহা যথাক্রমে 720 এবং 960 সে. মি. দূরত্ব অতিক্রম করিল। যাত্রার সময় হইতে 20 সেকেন্ড পর কণাটি কত সে মি. দূরত্ব অতিক্রম করে ? ($s = ut + \frac{1}{2} ft^2$ সূত্রটি ধরিয়া লইতে পার)।

(খ) ভূপৃষ্ঠ হইতে 136 মি. 80 সে. মি. উচ্চে অবস্থিত একটি বেলুন হইতে একখণ্ড পাথর ফেলিয়া দেওয়া হইল। উহা কখন মাটিতে পেঁছাইবে যদি বেলুনটি 6 মিটার/সেকেন্ড সমবেগে ঐ সময় (১) উপর দিকে উঠে, (২) নীচের দিকে নামে ? ($g = 960$ সে. মি./সেকেন্ড/সেকেন্ড ধরিয়া লও)।

৩। (ক) একটি সম-বলের অধীন কোন একটি কণা সরলরেখা বরাবর চলিতে শুরু করিল। প্রমাণ কর যে উহার গতীয় শক্তির বৃদ্ধি, প্রযুক্ত বলের দ্বারা কৃত কার্যের পরিমাণের সমান।

(খ) 5 কিলোগ্রাম-ওজনবিশিষ্ট একটি বস্তুকে 20 সে. মি. উচ্চে তুলিতে কত আর্গ (erg) কার্য করিতে হইবে ? ($g = 981$ সে. মি./সেকেন্ড^2)। যদি 1 জুল (Joule) $= 10^7$ আর্গ হয় তাহা হইলে কৃত কার্যের পরিমাণ কত জুল হইবে ?

(গ) সি. জি. এস. পদ্ধতিতে শক্তির (**Power**) একক ধরা হয় 1 ওয়াট (Watt) আর এফ. পি. এস. পদ্ধতিতে উহা লওয়া হয় 1 অশ্ব-শক্তি (**Horse Power** বা **H. P.**)। যদি 1 ফুট $= 30·5$ সে. মি., এবং 1 পাউন্ড $= 454$ গ্রাম ধরা যায়, তাহা

হইলে দেখাও যে 1 H. P.=746 Watts (প্রায়)। ($g=981$ সে. মি./সে.^{2} ধরিয়া লও)।

একটি 44 পাউন্ড ওজনবিশিষ্ট বস্তু 20-ফুট উচ্চে উঠান হইল একটি কপিকলের সাহায্যে। সময় লাগে 4 সেকেন্ড। কপিকলটির অশ্ব-শক্তি কত ?

৪। (ক) 10 গ্রাম ভরের একটি গোলক স্থির অবস্থা হইতে অভিকর্ষ টানে বাধাহীনভাবে 1000 সে. মি.-এর মধ্য দিয়া পড়িল এবং একটি বালুর স্তূপের মধ্যে 5 সে. মি. ভেদ করিয়া স্থির অবস্থায় আসিল। বালুর বাধা (ধ্রুবক ধরিয়া) গ্রাম-ভারে নির্ণয় কর।

(খ) একটি মসৃণ নততলের দৈর্ঘ্য 64 একক এবং উচ্চতা 32 একক। নততলের শীর্ষবিন্দু হইতে একটি কণা তলের উপর দিয়া গড়াইয়া পাদদেশে পড়িতে কত সময় লাগিবে ? ($g=32$ একক)।

(গ) এক ব্যক্তি 4 সে. মি./সেকেন্ড বেগসহ উত্তর-পূর্ব দিকে হাঁটিতেছেন ; এই বেগের যথাযথ উত্তর ও যথাযথ পূর্বদিকের উপাংশগুলি কত তাহা নির্ণয় কর।

৫। (ক) কোন সুদৃঢ় বস্তুর দুইটি বিন্দু A ও B-তে দুইটি অসমান, অসদৃশ, সমান্তরাল বল P এবং Q ক্রিয়া করে ($P>Q$)। একটি পরিচ্ছন্ন চিত্র অঙ্কন করিয়া উহাদের লব্ধির মান, দিক ও অবস্থান কত হইবে তাহা লিখ (কোন প্রমাণের প্রয়োজন নাই)।

(খ) একটি বিন্দুতে ক্রিয়ারত দুইটি বলের লব্ধির বৃহত্তম মান 17 এবং ক্ষুদ্রতম মান 7 ; যখন বল দুইটি θ কোণে ক্রিয়া করে, তখন উহাদের লব্ধির মান নির্ণয় কর, যদি $\cos\theta=7/15$ হয়।

(গ) বলের সামান্তরিক সূত্রটি চিত্রের সাহায্যে বর্ণনা কর।

৬। (ক) কোন বিন্দুর সাপেক্ষে একটি বলের ভ্রামকের সংজ্ঞা লিখ। যদি কোন বিন্দুর সাপেক্ষে P বলের ভ্রামক শূন্য হয়, তাহা হইলে তুমি কি কি সিদ্ধান্ত করিতে পার ?

একটি মিটার রুল (উহার ওজন নগণ্য ধরিয়া লও) উহার 1, 2, 3, 4……100, সে. মি. চিহ্নিত বিন্দুগুলিতে যথাক্রমে 1, 2, 3, 4,………100 গ্রামের ভরগুলি বহন করিতেছে। যে বিন্দুতে উহার ভারসাম্য রক্ষিত হয়, তাহার অবস্থান নির্ণয় কর।

[প্রয়োজনবোধে নিম্নের ফল দুইটি ব্যবহার করিতে পার ঃ—

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ এবং

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$]

(গ) কোন বস্তুর ভার-কেন্দ্র বলিতে কি বুঝ ?

প্রমাণ কর যে একটি সম-ত্রিকোণ পাতের ভার-কেন্দ্র এবং উহার বাহুগুলির মধ্য-বিন্দুতে স্থাপিত তিনটি সমান কণার ভার-কেন্দ্র একই বিন্দুতে অবস্থিত।

৭। (ক) দ্বিতীয় প্রণালীর একটি কপিকলের পরিচ্ছন্ন চিত্রসহ বর্ণনা কর। এইরূপ একটি কপিকলের সাহায্যে 7 পা ভারের ওজন ব্যবহার করিয়া 30 পা. ভারের ওজন তোলা যায় ; আবার 9 পা ভারের ওজন ব্যবহার করিয়া 44 পা. ভারের ওজন তোলা যায়। কপিকলটির মোট কপির সংখ্যা কত ? নীচের ব্লকের ওজন কত তাহাও নির্ণয় কর।

(খ) কোন একটি তুলার বাহুদ্বয় অসমান কিন্তু অন্য কোন দোষ-ত্রুটি নাই। একটি বস্তুকে পর পর পাল্লা দুইটিতে বসাইয়া ওজন পাওয়া গেল w_1 এবং w_2। বস্তুটির প্রকৃত ওজন কত তাহা নির্ণয় কর।

৮। (ক) একটি বৃত্তাকার পাতে এইরূপ একটি বর্গাকার ছিদ্র করা হইল, যাহার একটি কর্ণ বৃত্তটির একটি ব্যাসার্ধ। দেখাও যে অবশিষ্ট অংশের ভারকেন্দ্রের অবস্থান বৃত্তটির কেন্দ্র হইতে $\frac{a}{8\pi-4}$ দূরত্বে অবস্থিত। (a=বৃত্তের ব্যাস)।

(খ) অভিকর্ষের ক্রিয়াধীন একটি বস্তুকে উল্লম্বভাবে উপরের দিকে নিক্ষেপ করিলে, দেখাও যে বস্তুটি উঠিবার জন্য যে সময় লাগে নামিবার জন্যও সেই সময় লাগে।

৯। (ক) এক সাইকেল আরোহী 450 সে. মি./সেকেন্ড বেগে যাইতেছেন। আরোহী ও সাইকেলের যুক্ত ভর 109 কি. গ্রা.। যদি তিনি সাইকেল চালানো (pedalling) বন্ধ করেন এবং যদি তাহার গতির বিরুদ্ধে মোট বাধা 5 কি. গ্রা. ভারের সমান হয়, তবে কতদূর যাইয়া তিনি থামিয়া যাইবেন ?

(খ) শক্তির নিত্যতা তত্ত্বটি বিবৃত কর। অভিকর্ষে একটি পতনশীল কণার (ধরিয়া লও যে কণাটি স্থির অবস্থা হইতে যাত্রা করে) ক্ষেত্রে এই তত্ত্বটির সত্যতা যাচাই করিয়া দেখ।